

# Modalni in statistični pristop pri opisu zvočnega polja v prostoru

Rok Prislan

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, Jadranska 19, 1000 Ljubljana, Slovenija  
E-pošta: rok.prislan@gmail.com

**Povzetek.** Predstavljena sta dva najpogosteje uporabljena pristopa pri opisu zvočnega polja v prostoru: modalni in statistični. Modalni pristop je uporaben pri nižjih frekvencah, medtem ko je uporaba statističnega pristopa upravičena pri višjih frekvencah. Pristopa sta si komplementarna in uporabljena glede na obravnavan frekvenčni režim. V članku je na podlagi meritve izmerjenega zvočnega polja v prostoru predstavljen pojav naravnih načinov, na katerem temelji modalni opis. Ta je izpeljan iz valovne enačbe, ki vodi do ugotovitve, da je iskanje naravnih načinov matematično ekvivalentno iskanju lastnih funkcij pri danih robnih pogojih. Robni pogoji in numerične metode reševanja, ki so za prostorsko akustiko relevantni, so predstavljeni. V drugem delu je na podlagi prekrivanja resonanc utemeljen statistični opis zvočnega polja. Tako sta uvedena Schroederjeva frekvenca in koncept difuznega zvočnega polja, katerega uporabnost je predstavljena na izpeljavi zveze med izsevno močjo zvočnega vira, zvočnim tlakom v prostoru in absorpcijo na mejnih površinah.

**Ključne besede:** modalni opis zvočnega polja, statistični opis zvočnega polja, difuzno zvočno polje, Schroederjeva frekvenca

## A modal and a statistical description of the sound field in a room

There are two widely used approaches to describing the sound field in a room: the modal and the statistical approach. As the modal approach is used at lower and the statistical approach at higher frequencies, the two approaches can be used complementarily depending on the frequency range of our interest. The paper describes a sound field in a room and describes the observable natural modes. The modal description is derived from the wave equation. It is shown that the process of finding the natural modes is the same as finding eigenfunctions for a given set of boundary conditions. The boundary conditions for the acoustic case are presented. The statistical approach is explained by introducing the modal overlap which leads to the Schroeder frequency. The concept of the diffused sound field is presented together with the relation between the power of the sound source, sound pressure and sound absorption. Examples are given of using the concept of the diffuse sound field in technical acoustics.

## 1 UVOD

Cilj prostorske akustike je projektiranje akustike prostora, ki ustreza njegovi funkciji. Proces projektiranja je izrazito multilateralen, saj so potrebni razumevanje interakcije zvočnega polja z uporabljenimi materiali, poznavanje lastnosti zvočnih izvorov in razumevanje človekove percepcije akustike prostora. Vključevanje človeka je še posebej zahtevno, saj ne gre zgolj za optimiziranje parametrov akustike prostora, temveč je treba upoštevati tako psiho-akustične vidike, kot tudi

elemente tradicije, kulturnega okolja in ne nazadnje oblikovne zahteve za prostor [1].

Kljub omenjenemu pa je za uspešno napovedovanje akustičnih lastnosti prostora\* ključno razumevanje osnovnih fizikalnih mehanizmov, prek katerih se zvočno polje v prostoru vzpostavi. To je pomembno ne glede na to, da je mogoče matematično opisati zgolj redke geometrije oz. nekatere idealne primere, ki v realnosti nikoli niso doseženi. Razumevanje osnovnih konceptov je namreč ključ do razumevanja tudi bolj kompleksnih primerov, ki so tudi precej manj intuitivni.

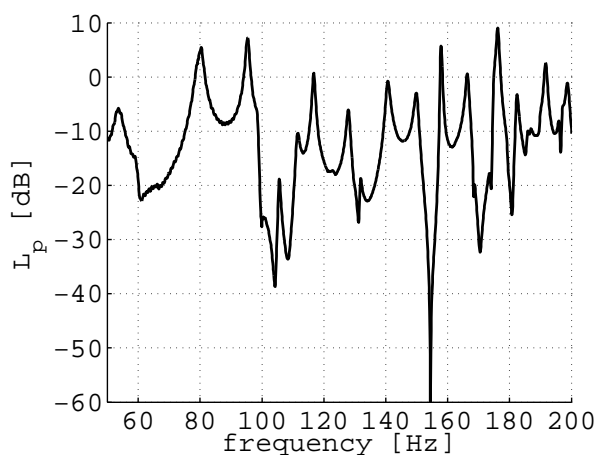
Članek predstavlja dva pristopa, ki se v praksi pogosto uporabljata: modalni pristop in statistični pristop [2]. Članek ni zastavljen kot celovit pregled nad področjem, temveč poskuša predvsem združeno opisati koncepte, ki se sicer razsajajo prek več strok.

## 2 MODALNI OPIS ZVOČNEGA POLJA

Ob opazovanju frekvenčnega odziva zvočnega polja v prostoru (glej sliko 1) postane očitno, da je odziv pri nekaterih frekvencah izjemno močan. Ta efekt je še posebej izrazit, če je v prostoru malo zvočne absorpcije.

Frekvence, pri katerih prihaja do močnega odziva, so *resonančne frekvence* in oblika zvočnega polja (tj. prostorska porazdelitev zvočnega tlaka) pri resonančnih frekvencah se imenuje *naravni način* (*ang.* natural mode).

Modalni opis zvočnega polja v prostoru temelji na izračunu resonančnih frekvenc in naravnih načinov za



Slika 1: Izmerjen frekvenčni odziv pravokotnega prostora dimenzij 328 cm  $\times$  438 cm  $\times$  295 cm. Območja visokega zvočnega tlaka predstavljajo resonančne frekvence, ki pa niso nujno vse vidne, če je zvočni izvor ali mikrofonski postavljen v vozni naravnega načina. Meritev je vzeta iz [3].

dano geometrijo prostora in dane robne pogoje. V nadaljevanju so predstavljeni postopki, ki ob uporabi ustreznih matematičnih orodij pripeljejo do naravnih načinov in resonančnih frekvenc. Ker nanje vplivajo tudi robni pogoji, so predstavljeni tisti robni pogoji, ki se v akustiki najpogosteje srečajo.

### 2.1 Helmholtzova enačba

Temeljna enačba propagacije zvoka je *valovna enačba*, ki ima v neskončnem prostoru obliko [4]:

$$\left(\nabla^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) p(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1)$$

Enačba je homogena in ne upošteva izvorov, zato je njena desna stran nič.

Ob separaciji časovnega in krajevnega dela z nastavkom  $p(\mathbf{r}, t) = P(\mathbf{r})T(t)$  se obe odvisnosti v valovni enačbi lahko zapišeta ločeno:

$$\frac{\nabla^2 P(\mathbf{r})}{P(\mathbf{r})} = \frac{1}{c^2 T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Enačaj v enačbi (2) velja za vsako točko v prostoru in ob vseh časih le, če je vsaka stran konstantna. Tako enačba razpade na krajevno in časovno Helmholtzovo enačbo

$$(\nabla^2 + k^2) P(\mathbf{r}) = 0, \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} + k^2\right) T(t) = 0. \quad (4)$$

Za časovni del so rešitev harmonski valovi

$$T(t) = T_0 \exp(-i\omega t),$$

z valovnim vektorjem  $k = \omega/c$ . Nasprotno, za krajevni del rešitev ni vnaprej znana in je treba poiskati lastne funkcije operatorja  $\nabla^2$  za dano geometrijo in robne pogoje.

### 2.2 Lastne funkcije krajevne Helmholtzove enačbe

Rešiti je treba krajevno Helmholtzovo enačbo (3)

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\mathbf{r}) = 0,$$

kar je ekvivalentno iskanju lastnih funkcij  $\psi_n$  in lastnih vrednosti  $\lambda_n$  operatorja  $\nabla^2$

$$\nabla^2 \psi_n(\mathbf{r}) = \lambda_n \psi_n(\mathbf{r}) = -k_n^2 \psi_n(\mathbf{r}). \quad (5)$$

Pri tem mora biti uporabljena pravilna oblika operatorja  $\nabla^2$ , ki je odvisna od koordinatnega sistema, v katerem se iščejo rešitve.

Rešitev je dana v obliki družine funkcij, ki morajo biti ustrezno normirane, tako da za vsako velja

$$\int_V \psi_n^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1. \quad (6)$$

Iskanje lastnih funkcij in lastnih vrednosti je ustaljen postopek v matematiki, zato je zainteresiran bralec napoten na literaturo s področja matematične analize.

### 2.3 Robni pogoji

Določitev konstant, ki popolnoma definirajo rešitev iz družine funkcij (glej 2.2), poteka z upoštevanjem robnih pogojev (RP). Ti so definirani z mejno geometrijo prostora ( $S$ ) in obliko interakcije zvoka z njo. RP je mogoče razdeliti v tri skupine [5] glede na njihov matematični zapis\*: I.

- 1) **tip RP (Dirichlet)** - predpisana je vrednost zvočnega tlaka

$$p(\mathbf{r} \in S) = C$$

Ta RP v akustiki nima praktičnega pomena.

- 2) **tip RP (Neumann)** - predpisana je vrednost krajevnega odvoda tlaka

$$\left. \frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\mathbf{r} \in S} = C,$$

kjer je  $\mathbf{n}$  enotski vektor, pravokoten na  $S$ . Ta RP velja npr. za rigidno steno ( $C = 0$ ), na kateri ni absorpcije, in prihaja do popolnega odboja zvočnega valovanja. Ta robni pogoj se uporablja v vseh šolskih primerih izračuna naravnih načinov v prostoru.

- 3) **tip RP (Robin)** - kombinacija RP prvega in drugega tipa

$$\left[ Ap(\mathbf{r}) + B \frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\mathbf{r} \in S} = C.$$

Ta RP se imenuje tudi *impedančni*, saj je tedaj, ko je  $C = 0$ , specifična impedanca  $p/u = B/Ai\omega\rho$ . To postane očitno ob upoštevanju zveze med zvočnim tlakom in hitrostjo

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p = 0 \quad (7)$$

\*Za obsežen pregled robnih pogojev v akustiki je bralec napoten na [6].

oz. ob predpostavki ravnih valov

$$-i\omega\rho u_{\perp} + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0.$$

#### 2.4 Omejitve modalnega pristopa

Za nekatere geometrije in robne pogoje je analitično iskanje lastnih vrednosti in lastnih funkcij relativno preprosto [5]. Žal pa analitične rešitve niso znane za splošen primer, temveč zgolj za nekatere geometrije (npr. kvader, sfera in cilindar) in robne pogoje prvega ali drugega tipa. Obe omejitvi naredita celoten pristop neuporaben za prostore, ki jih srečamo v realnosti, saj so tako uporabljeni materiali kot tudi oblika prostorov veliko bolj kompleksni.

Alternativno je mogoče za poljubno geometrijo prostora naravne načine in resonančne frekvence izračunati z valovnimi računalniškimi metodami. Mednje spadajo metoda končnih razlik [7], metoda končnih elementov [8] in metoda robnih elementov [9] – skupno jim je to, da diskretizirajo geometrijo prostora. Zahtevana finost te diskretizacije je ključno povezana z njihovo uporabnostjo; želena valovna dolžina modeliranja zvočnega polja je namreč direktno povezana z velikostjo elementa diskretizacije [10]. Izkaže se, da so z računsko močjo, ki je trenutno na voljo, valovne metode v praksi omejene na uporabnost izključno pri nizkih frekvencah, ko so valovne dolžine velike [11]. Izkaže se tudi, da so tako časovne, kot tudi pomnilniške zahtevnosti valovnih metod takšne, da omejitve ne bodo odpravljene v doglednem času razvoja strojne opreme.

### 3 STATISTIČNI OPIS ZVOČNEGA POLJA

Upravičenost uporabe statističnega opisa zvočnega polja je predstavljena s pomočjo prekrivanja resonanc. Uvedena sta Schroederjeva frekvenca in koncept difuznega zvočnega polja. Primer uporabe koncepta difuznega zvočnega polja je predstavljen z izpeljavo zveze med močjo zvočnega izvora, zvočnim tlakom in absorpcijsko površino. Ta primer je predstavljen, ker nazorno prikaže uporabnost pristopa, sicer pa so podrobne izpeljave opuščene, saj razumevanje statističnega pristopa zajema napredno znanje statistike. Zainteresiran bralec je napoten na osnovno literaturo s področja (npr. [12]).

#### 3.1 Schroederjeva frekvenca in difuzno zvočno polje

Kot je predstavljeno v poglavju 2.4, je modalni pristop omejen na nizke frekvence. Tako se pri višjih frekvencah uporablja statistični pristop, ki izkorišča dejstvo, da se gostota resonanc viša kot kvadratna funkcija frekvence [2]:

$$n(f) = \frac{4\pi V}{c^3} f^2. \quad (8)$$

Da se število resonanc večja s frekvenco, je razvidno tudi iz slike 1.

Poleg gostote resonanc pa je ključno tudi njihovo prekrivanje, kar je v svojem temeljnem članku [13]

obravnaval M. Schroeder. Ključna Schroederjeva ugotovitev je, da je prekrivanje resonanc (*ang. modal overlap*) približno 3 pri frekvenci

$$f_{Sch} = 2000 \sqrt{\frac{T_{60}}{V}}. \quad (9)$$

V gornji enačbi je  $f_{Sch}$  Schroederjeva frekvenca v Hz,  $T_{60}$  odmevni čas v s,  $V$  pa volumen v  $m^3$ .

V prostorski akustiki velja, da je nad Schroederjevo frekvenco statistični pristop upravičen. Takrat namreč k zvočnemu polju pri dani frekvenci bistveno prispeva veliko število naravnih načinov, tako da obravnavanje posameznih resonanc ločeno nima pomena. Uporaba statističnih metod je priročna, saj vodi do preprostih relacij med fizikalnimi količinami, ki so sicer povezane na veliko bolj zapletene načine. Najlepši primer tega je Sabinova reverberacijska teorija [1] in vsem poznana Sabinova enačba za odmevni čas, ki se izračuna zgolj s pomočjo površine prostora, njegovega volumna in količine absorpcije v njem

$$T_{60} = \frac{0.16V}{A}, \quad (10)$$

kjer je  $T_{60}$  odmevni čas v s,  $V$  volumen v  $m^3$ ,  $A$  pa absorpcija prostora v enotah  $m^2$ .

Pomembno idealizirano zvočno polje, ki temelji na statističnem opisu, je *difuzno zvočno polje*. Njegovo temeljenje na statističnem pristopu je očitno že iz njegove definicije, ki je po akustičnem slovarju [14]:

“Difuzno zvočno polje je sestavljeno iz neskončno mnogo nekoreliranih ravnih valov, ki imajo enakomerno smerno porazdeljeno intenziteto. Skupna intenziteta je torej nič.”

#### 3.2 Izsevana moč zvočnega izvora izvora

Kot primer aplikacije koncepta difuznega zvočnega polja je izpeljana zveza med izsevano močjo zvočnega vira, zvočnim tlakom in absorpcijsko površino v prostoru\*.

Zvočno polje je zapisano v obliki ravnih valov

$$\hat{p}(\theta, \varphi) = \frac{C}{\sqrt{4\pi}} \exp(i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)), \quad (11)$$

pri čemer se komponente valovnih vektorjev v sfernih koordinatah zapišejo kot:

$$k_x = k \sin \theta \cos \varphi, \quad k_y = k \sin \theta \sin \varphi, \quad k_z = k \cos \theta. \quad (12)$$

Ker so skladno z definicijo difuznega zvočnega polja valovi nekorelirani, med njimi ni interference. Tako je rms vrednost zvočnega tlaka v poljubni točki v prostoru izračunana kot prostorski integral kvadrata zvočnega tlaka iz enačbe 11

$$p_{rms}^2 = \frac{|C|^2}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = \frac{|C|^2}{2}. \quad (13)$$

\*Izpeljava je povzeta po [2].

Ob upoštevanju zveze med zvočnim tlakom in hitrostjo iz enačbe (7) ter enačbe (11) je mogoče zapisati z-komponento zvočne hitrosti

$$\hat{u}_z(\theta, \varphi) = \frac{C \cos \theta}{\rho c \sqrt{4\pi}} \exp(i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)). \quad (14)$$

Pri tem je  $\rho$  gostota zraka,  $c$  pa hitrost propagacije zvoka. Tako je mogoče na podlagi enačbe (11) in (14) zapisati tudi z-komponenta zvočne intenzitete

$$I_z(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\hat{p}(\theta, \varphi) \hat{u}_z^*(\theta, \varphi)] = \frac{|C|^2}{8\pi\rho c} \cos \theta. \quad (15)$$

Skladno z definicijo difuznega zvočnega polja je integracija intenzitete po celotnem prostorskem kotu enaka nič. Drugače je na mejnih površinah prostora, kjer integracija poteka zgolj po polovici prostorskega kota. Tako je na mejni površini z normalo v smeri z-koordinate vpadla intenziteta

$$I_{v,z} = \frac{p_{\text{rms}}^2}{4\rho c}. \quad (16)$$

To je mogoče interpretirati kot vpadlo zvočno moč na enoto površine. Zato je smiselno uvesti skupno absorpcijo v prostoru kot

$$A = \sum_i S_i \alpha_i, \quad (17)$$

ki pomeni delež vse zvočne energije, ki se absorbira ob odboju zvoka na mejnih površinah. V enačbi (17) je zapisna vsota produktov koeficientov absorpcije zvoka<sup>†</sup>  $\alpha$ , [1, str. 46-49] in pripadajočih površin. Tako je iskana zveza med izsevano močjo, zvočnim tlakom in absorpcijo

$$P_{\text{izvor}} = P_{\text{abs}} = I_v A = \frac{p_{\text{rms}}^2}{4\rho c} A. \quad (18)$$

Ta upošteva energijsko bilanco, tako da je izsevana energija izvora enaka absorbirani energiji na mejnih površinah, tj. obravnavamo stacionarno zvočno polje. Zveza (18) upošteva tudi, da je zvočno polje izotropno, kar pomeni, da je zvočna intenziteta enaka neodvisno od orientacije mejnih površin.

### 3.3 Uporabnost difuznega zvočnega polja v tehniški akustiki

V tehniški akustiki je koncept difuznega zvočnega polja še posebej razširjen in na njem temelji veliko standardiziranih akustičnih meritev (npr. ISO 140, ISO 354, ISO 3382 [15]). Tako se s pomočjo enačbe 18 določa hrupnost zvočnih izvorov (ISO 3747), kjer je absorpcija  $A$  določena s pomočjo Sabinove enačbe (10), torej s pomočjo meritve odmevnega časa.

Za vse meritve, ki temeljijo na difuznem zvočnem polju, pa obstajajo zahteve, ki nekoliko omejijo njihovo uporabnost. Tako je pristop neuporaben izpod

<sup>†</sup>Koeficienti absorpcije zavzemajo vrednosti med 0 in 1 in predstavljajo delež energije, ki se ob vpadu zvočnega vala na površino absorbira.

Schroederjeve frekvence, izvori zvoka pa morajo biti ustrezno širokega spektra, sicer ni zadoščeno zahtevi o nekoreliranosti zvočnih valov difuznega zvočnega polja.

Da je koncept difuznega zvočnega polja pomemben, dokazuje tudi trajajoča razprava v strokovni javnosti. Ključni predmet diskurza je dejstvo, da ne obstaja kvantitativno merilo za difuznost zvočnega polja [16], ki bi bilo tudi široko sprejeto. Tako je prisotnost difuznega zvočnega polja za večino praktičnih potreb kar predpostavljena.

## 4 SKLEPI

Pokazano je bilo, da je modalni pristop, ki temelji na osnovni enačbi propagacije zvoka, tj. valovni enačbi, v matematičnem pogledu ekvivalenten iskanju lastnih vrednosti in lastnih funkcij diferencialnega operatorja ob danih robnih pogojih. Robni pogoji so bili obdelani ločeno. Žal je pristop kot analitična metoda omejen na geometrije in robne pogoje, ki se v realnosti le redko pojavijo. V tem smislu je analitičen modalni pristop pomemben zgolj za razumevanje temeljnih konceptov akustike prostora.

Drugače je z valovnimi numeričnimi metodami, ki ne poznajo omejitev glede geometrije in robnih pogojev. To naredi modalni pristop uporaben tudi v praksi, a žal ne v vseh primerih. Tudi računalniške metode imajo namreč omejitve, ki so vezane na računsko in prostorsko zmogljivost, ki postane omejujoča pri visokih frekvencah.

Tako postane pri višjih frekvencah upravičen statistični pristop, za katerega se privzame Schroederjeva frekvenca kot najnižja frekvenca uporabnosti. V praksi so statistične metode široko v rabi v tehniški akustiki ter so podlaga za reverberacijsko teorijo. Koncept difuznega zvočnega polja namreč prinese poenostavljene zveze med fizikalnimi količinami, kar naredi koncept zelo priročen.

## LITERATURA

- [1] H. Kuttruff, *Room acoustics*, 2nd ed. Applied Science Publishers London, 1979.
- [2] F. Jacobsen, *The sound field in a reverberation room - no. 31261*, Technical University of Denmark, January 2010.
- [3] R. Prislán, "Aspects of room acoustic modeling," Master's thesis, Technical University of Denmark, Department of Electrical Engineering, Danska, 2011.
- [4] —, "Ikonalni pristop k akustičnem modeliranju," Master's thesis, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, Slovenia, 2009.
- [5] I. Kuščer, A. Kodre, H. Neunzert, M. Razpet, and B. Golli, *Matematika v fiziki in tehniki*. DMFA - založništvo, 1994.
- [6] T. Cox and P. D'Antonio, *Acoustic Absorbers and*

- Diffusers: Theory, Design and Application*. Taylor & Francis, 2009.
- [7] K. Kowalczyk and M. van Walstijn, "Virtual room acoustics using finite difference methods. how to model and analyse frequency-dependent boundaries?" *ISCCSP*, pp. 1504–1509, March 2008.
- [8] V. Easwaran and A. Craggs, "On Further Validation and use of the Finite-Element Method to Room Acoustics," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 187, no. 2, pp. 195–212, October 26 1995.
- [9] Y. Kawai, "Boundary element method for computing transient acoustic waves in a room," *Technology Reports of Kansai University*, pp. 69–77, 2007.
- [10] S. Marburg and B. Nolte, *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids: Finite and Boundary Element Methods*. Springer London, 2008.
- [11] I. Harari and T. J. R. Hughes, "A cost comparison of boundary element and finite element methods for problems of time-harmonic acoustics," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 97, no. 1, pp. 77–102, May 1992.
- [12] A. D. Pierce, *Acoustics - An Introduction to Its Physical Principles and Applications*. Melville, NY, USA: Acoustical Society of America (ASA), 1989.
- [13] M. Schroeder, "Die statistischen parameter der frequenzkurven von grossen räumen," *Acustica*, no. 4, pp. 594–600, 1954.
- [14] C. Morfey, *The Dictionary of Acoustics*. London, UK: Academic Press, 2001.
- [15] I. O. for Standardization, "iso," 2013. [Online]. Available: <http://www.iso.org/>
- [16] T. J. Schultz, "Diffusion in reverberation rooms," *JSV*, vol. 16, no. 1, pp. 17–28, 1971.

**Rok Prislán** je leta 2009 diplomiral iz področja matematične fizike na Univerzi v Ljubljani. Leta 2011 je na Danski Tehniški Univerzi magistriral iz področja *Engineering Acoustics* in je trenutno doktorski študent fizike na Univerzi v Ljubljani. Njegovo področje raziskovanja obsega področja numeričnih simulacij akustike prostora, modeliranje akustičnih elementov, meritev akustičnih parametrov prostora, uklona zvoka in senzitivnosti zvočnega polja v prostoru.