

## Konvolucijski teorem ne velja?

Andrej Košir

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko  
Tržaška 25, 1000 Ljubljana

E-pošta: andrej.kosir@fe.uni-lj.si

**Povzetek.** Konvolucijski teorem, po katerem je linearen časovno invarianten sistem popolnoma podan s svojim impulznim odzivom, je pomemben sestavni del analize in sinteze linearnih sistemov. Članek [1] trdi, da konvolucijski teorem ne velja za vse linearne sisteme. Postavi se vprašanje, kakšne dodatne pogoje je treba postaviti za linearen sistem in obravnavane signale, da bo zanj veljal konvolucijski teorem. Od tod namreč pričakujemo odgovor na vprašanje ali konvolucijski sistem drži za vse sisteme, ki jih srečamo v realnem svetu. V članku predstavljamo inženirski pogled na temo omenjenega članka. Predstavljamo konstrukcijo preprostega primera sistema, za katerega konvolucijski teorem ne velja. Sledi predstavitev klasičnega dokaza konvolucijskega teorema. Konstruirani primer pospremimo skozi omenjeni dokaz in komentiramo zaplet. Povzamemo, da navedeni protiprimer ne posega v analizo in sintezo linearnih sistemov v realnem svetu.

**Ključne besede:** Impulzni odziv, linearen časovno invarianten sistem, konvolucija

## Is validity of the Convolution theorem questionable?

**Extended abstract.** According to the convolution theorem, every linear system can be modeled by its impulse response. This is one of the fundamental tools in the linear system analysis and synthesis. The paper [1] presents a counterexample to the classical convolution theorem and raises the question of its impact on the real-world systems analysis and design.

For demonstration purposes only, a simple electric circuit analysis as an example of convolution theorem application in practice is presented.

An engineering view on the matter presented in the paper [1] is given. A construction of a simple counterexample to the classical form of the convolution theorem is described and confronted by the proof of the classical convolution theorem. Prior to the discussion, the classical formulation of convolution theorem together with definitions and the outline of its proof is introduced.

It appears the central point of validity of the convolution theorem are the definition of the convolution operator  $*$  and the domain (family of functions) it is defined on. The conclusion is that the counterexample has no effect whatsoever on the real-world systems analysis and synthesis.

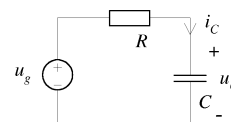
**Key words:** impulse response, linear shift invariant systems, convolution

Prvi odgovor na postavljen izziv članka [1] je bil, da konstrukcija najverjetneje vključuje nekavzalen sistem, glejte [3], ali pa je ni mogoče izvesti na realnih preslikavah (le na kompleksnih). Izkazalo se je, da nobeno od navedenih ugibanj ne drži.

Razmislek vodi do soočenja dokaza teorema o konvoluciji in konstruiranega protiprimera, kar v skrajšani obliki podajamo v prvih dveh poglavjih. S tem je pripravljeno vse, kar potrebujemo za oris inženirskih vidikov obravnavanega problema.

Namen tega članka je na podlagi članka [1] izdelati poenostavljen protiprimer konvolucijskemu teoremu in nato ta primer soočiti z običajno rabo konvolucije v analizi in sintezi realnih sistemov.

Oglejmo si ilustrativni primer rabe konvolucijskega teorema v praksi. Vzemimo strnjeno vezje na sliki 1, za vzbujanje izberemo  $u_g(t) = U_{g0}1(t)$ , kjer je  $1(t)$  enotina stopnica,  $1(t) = 1$  za  $t \geq 0$  in  $1(t) = 0$  sicer.



Slika 1. Strnjeno vezje

### 1 Uvod

Članek [1] prinaša protiprimer konvolucijskemu teoremu za linearne sisteme. Ker je konvolucija temelj analize in sinteze linearnih sistemov, je tak rezultat zelo presenetljiv. Še posebej nas je pritegnilo dejstvo, da je dokaz konvolucijskega teorema elementaren, konstrukcijski in preprost.

Izračunajmo odziv vezja  $u_C(t)$  s pomočjo konvolucijskega teorema, glejte poglavje 3. Odziv na enotni (Diracov) impulz  $\delta(t)$  označimo s  $h(t)$ . Najpreprosteje ga izračunamo s pomočjo Laplaceove transformacije [7], ki da enačbo  $-1 + RI_C(s) + \frac{1}{C}s I_C(s) = 0$ ,  $I_C(s)$  je Laplaceov transform toka  $i_C(t)$ . Upoštevaje

$U_C(s) = \frac{1}{C_s} I_C(s)$  izrazimo  $H(s) = \frac{U_C(s)}{U_q(s)} = \frac{1}{1+RCs}$  in izračunamo inverz

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s)) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} 1(t).$$

Odziv vezja na vzbujanje  $u_g(t) = U_{g0} 1(t)$  je po konvolucijskem teoremu enak

$$\begin{aligned} u_C(t) &= (u_g * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_g(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{U_{g0}}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \int_0^t e^{\frac{\tau}{RC}} d\tau \\ &= U_{g0} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) 1(t). \end{aligned}$$

Primer smo izbrali s področja elektrotehnike, praktično zanimivih primerov je na voljo dovolj tudi na drugih področjih analize in sinteze sistemov.

Ali je mogoče najti primer s področja praktične rabe konvolucijskega teorema (s področja elektrotehnike in drugje), pri katerem se dejanski odziv sistema ne ujema z odzivom, izračunanim s pomočjo konvolucijskega teorema? Namen tega članka je pokazati, da to ni mogoče in je uporaba konvolucijskega teorema v analizi in sintezi sistemov varna.

## 2 Signali s končno energijo

Inženirski pogled na konvolucijski teorem zajemajo signali, ki so zanimivi pri obravnavi realnih problemov. Prva omejitev, ki ločuje poljubne funkcije od realno zanimivih signalov, je končna energija. Energijo signala izračunamo z integralom kvadrata signala (ali vsoto v diskretnem primeru). Označimo družino s kvadratom integrabilnih funkcij na  $d$  dimenzioanlnem prostoru,  $\mathcal{L}^2 = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}; \int |f(\underline{t})|^2 d\underline{t} < \infty\}$ ,  $d \in \mathbb{N}$ ,  $d > 0$ . V tem članku obravnavamo primer poljubne dimenzije  $d$ , ki je izbrana in enaka za celoten članek.

Argument  $\underline{t} \in \mathbb{R}^d$  je čas. Najpogostejši primer je seveda  $d = 1$ . V tem okviru zanimivi normi na  $\mathbb{R}^d$  sta  $\|\underline{t}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^d |t_i|^2}$ ,  $\|\underline{t}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |t_i|$ . Energija signala  $f$  je njegova kvadratična norma na  $\mathcal{L}^2$  in je dana z  $\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(\underline{t})|^2 d\underline{t}\right)^{\frac{1}{2}}$ . Signal  $f$  ima končno energijo, ko velja  $\|f\|_2 < \infty$ . Poleg tega je konvolucija  $f * g$  v klasičnem smislu mogoče definirati le za funkcije, za katere definicijski integral konvergira, glejte teorem 1. Izkaže se, da je to natanko tedaj, ko velja  $f, g \in \mathcal{L}^2$ , glejte [6]. To sta razloga, zaradi katerih inženirski pomen konvolucijskega teorema obravnavamo v okviru prostora funkcij  $\mathcal{L}^2$ .

## 3 Konvolucijski teorem

V tem poglavju bomo ponovili konstrukcijo dokaza konvolucijskega teorema, s katerim želimo razjasniti najdbo linearnega sistema, za katerega konvolucijski teorem ne velja. Dodajamo najnujnejše definicije.

Konvolucijski teorem srečamo v več oblikah. Najpogostejša oblika pove, da je odziv linearnega časovno invariantnega sistema  $H$  popolnoma podan z impulznim odzivom sistema  $h$ . Odziv  $y$  na izbrano vzbujanje  $x$  je enak konvoluciji impulznega odziva in vzbujanja  $x * h$ .

Izberimo zaporedje funkcij

$$u_n(\underline{t}) = \begin{cases} n^d, & \|\underline{t}\|_\infty \leq \frac{1}{n}; \\ 0, & \text{sicer,} \end{cases} \quad n > 0.$$

Neposredni račun pokaže, da za vse  $n > 0$  velja  $\int_{\mathbb{R}^d} u_n(\underline{t}) d\underline{t} = 1$ .

Funkcija enotin impulz (Diracov delta)  $\delta$  je limita  $\delta(\underline{t}) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\underline{t})$ . Funkcija  $\delta$  je posplošena funkcija, kar zahteva posebno pozornost pri delu z njo. Take funkcije matematično natančno obravnava teorija ditribucij, glejte [5], a v našem okviru take obravnave ne potrebujemo.

Preslikava translacija  $T_{\underline{\tau}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  na družini preslikav  $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}\}$  je pri izbranem  $\underline{\tau} \in \mathbb{R}^d$  dana s predpisom  $(T_{\underline{\tau}} f)(\underline{t}) = f(\underline{t} - \underline{\tau})$ . Sistem  $H : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  je časovno invarianten, če za vse  $\underline{t} \in \mathbb{R}^d$  in poljubno konstanto  $\underline{\tau} \in \mathbb{R}^d$  velja

$$(HT_{\underline{\tau}} f)(\underline{t}) = (Hf)(\underline{t} - \underline{\tau}),$$

in linearen če pri poljubnih konstantah  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  in funkcijah  $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$  za vse  $\underline{t}$  velja

$$(H(a_1 f_1 + a_2 f_2))(\underline{t}) = a_1 (Hf_1)(\underline{t}) + a_2 (Hf_2)(\underline{t}).$$

Ker je funkcija  $\delta$  posplošena, moramo posebej določiti pojem impulznega odziva. Sistem  $H : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  premore impulzni odziv  $h$ , če zanj pri poljubnem  $\underline{t} \in \mathbb{R}^d$  obstaja limita

$$h(\underline{t}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Hu_n)(\underline{t}).$$

Konvolucija funkcij  $f, g \in \mathcal{F}$  je za poljuben  $\underline{t} \in \mathbb{R}^d$  dana s predpisom

$$(f * g)(\underline{t}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\underline{\tau}) g(\underline{t} - \underline{\tau}) d\underline{\tau}, \quad (1)$$

seveda le tedaj, ko integral konvergira.

Koncolucijski teorem v klasični obliki navajamo skupaj s skico dokaza. Samo razumevanje dokaza ni nujno potrebno za razumevanje ideje tega članka.

**Teorem 1** Naj bo  $H : \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}^2$  linearen časovno invarianten sistem, ki premore impulzni odziv  $h = H\delta$ . Potem za poljubno funkcijo (odziv)  $f \in \mathcal{L}^2$  velja

$$Hf = h * f.$$

**Dokaz:** Hölderjeva neenačba, glejte [4], zagotavlja, da za funkciji  $f, g \in \mathcal{L}^2$  velja  $f * g \in \mathcal{L}^2$  in zato konvolucija  $h * f$ , ki nastopa v teoremu, vedno obstaja.

S  $\underline{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$  označimo multiindeks z velikostjo  $|\underline{k}| = |k_1| + \dots + |k_d|$ . Množenje vektorja  $\underline{\tau}$  z multiindeksom  $\underline{k}$  po koordinatah označimo s  $\underline{k} \circ \underline{\tau} = (k_1 \tau_1, \dots, k_d \tau_d)$ .

Vzmemo  $\Delta_{\mathcal{I}_n} = \frac{1}{n}(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^d$ . Za funkcijo

$$f_{nN}(\underline{t}) = \sum_{|\underline{k}| \leq N} f(\underline{k} \circ \Delta_{\mathcal{I}_n}) u_n(\underline{t} - \underline{k} \circ \Delta_{\mathcal{I}_n}) \frac{1}{n^d}$$

pri vseh  $n > 0$  in  $N > 0$  velja  $f_{nN} \in \mathcal{L}^2$ . Neposredni račun pokaže, da za vse  $\underline{t} \in \mathbb{R}^d$  velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \|f(\underline{t}) - f_{nN}(\underline{t})\|_2 = 0,$$

glejte [4] in [6]. Elektrotehniško motivacijo za tako konstrukcijo najdete v [7].

Izračunajmo odziv sistema  $H$  na vhod  $f_{nN}$  pri izbranih  $n, N \in \mathbb{N}$  in  $\underline{t} \in \mathbb{R}^d$ ,

$$(Hf_{nN})(\underline{t}) = \sum_{|\underline{k}| \leq N} f(\underline{k} \circ \Delta_{\mathcal{I}_n}) (Hu_n)(\underline{t} - \underline{k} \circ \Delta_{\mathcal{I}_n}) \frac{1}{n^d}.$$

Ker velja  $f, f_n \in \mathcal{L}^2$ , obstaja limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} (Hf_{nN})(\underline{t}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\underline{\tau}) \delta(\underline{t} - \underline{\tau}) d\underline{\tau} = (f * \delta)(\underline{t}).$$

Pri tem smo upoštevali definicijo Riemannovega integrala, glejte [6], ter linearnost in časovno invariantnost sistema  $H$ . S tem je (brez podrobnosti) klasična oblika teorema dokazana.  $\square$

Za naš razmislek je pomembno, da konvolucije ni mogoče definirati brez omejitve na kvadratično integrabilne funkcije, kar smo dosegli z uvedbo družine funkcij  $\mathcal{L}^2 \subset \mathcal{F}$ .

#### 4 Konstrukcija protiprimera

Na podlagi konstrukcije v članku [1] bomo konstruirali kar se da preprost primer linearnega časovno invariantnega sistema, za katerega v izbrani postavitvi (podrobnosti sledijo) konvolucijski teorem ne velja. V prvem delu tega poglavja bomo orisali splošnejšo konstrukcijo protiprimera v omenjenem članku. Nato konstruiramo

linearen sistem  $H$ , izračunamo njegov impulzni odziv  $h = H\delta$ , ki je enak  $h = 0$ , in končno poiščemo funkcijo  $f$ , pri kateri omenjeni linearni sistem premore neničeln odziv  $Hf \neq 0$ . Po konvolucijskem teoremu bi zaradi linearnosti konvolucije moralo veljati  $Hf = 0$ , kar je protislovje.

Konstrukcija v članku [1] obravnava kompleksne funkcije na  $\mathbb{R}^d$ , v tem razmisleku se omejimo na realne. Naj bo  $\mathcal{F}_L = \{f \in \mathcal{F} : P(f)\}$ , kjer je zahtevana lastnost  $P(f)$  omejenost in obstoj limite  $\lim_{\|\underline{t}\|_2 \rightarrow \infty} f(\underline{t})$ , družina funkcij. Ta limita je omejena, a ni nujno enaka 0.

Uvedimo operator  $H_L : \mathcal{F}_L \rightarrow \mathcal{F}$ , dan s predpisom

$$(H_L f)(\underline{t}) = \lim_{\|\underline{s}\|_2 \rightarrow \infty} f(\underline{s}).$$

Rezultat  $H_L f$  je konstantna preslikava v  $F$ . Izkaže se, da jo je mogoče razširiti do operatorja  $H : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ , pri čemer velja  $H|_{\mathcal{F}_L} = H$ . Okvir dokaza je naslednji. Pokažemo, da velja

1.  $\mathcal{F}_L$  je linearen podprostor v  $\mathcal{F}$ .
2.  $H_L$  je linearen funkcional na  $\mathcal{F}_L$ .
3.  $H_L$  je omejen operator v normi  $\|\cdot\|_\infty$ .

Po Hahn-Banachovem izreku, glejte [5], lahko funkcional  $H_L$  razširimo do funkcionala  $H_E$  na  $\mathcal{F}$ . Ta funkcional nato obravnavamo kot linearen operator, ki slika  $H_E : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ . S tem je konstrukcija dokončana. Da operator  $H_E$  res služi za protiprimer, bomo pokazali v naslednjem poglavju.

Tudi pri konstrukciji protiprimera menimo, da podrobna izvedba dokaza, predvsem rabe Hahn-Banachovega teorema, ne pripomore bistveno k obravnavani temi. Dodajmo le, da za polnormo, ki nastopa v Hahn-Banachovem teoremu, izberemo  $p(f) = |H_L f|$ .

Za konstruiran protiprimer najprej opazimo, da je odziv sistema, ki ga predstavlja  $H$ , vedno konstantna funkcija in že to kaže, da ne more pomeniti inženirsko zanimivih primerov.

Naša konstrukcija in njen dokaz se razlikujeta od konstrukcije članka [1], kjer obstoj impulznega odziva definira le na zveznih funkcijah. Konstrukcija v omenjenem članku ne dovoljuje izračuna impulznega odziva v običajnem smislu, saj funkcija  $\delta$  sploh ne leži v domeni konstruiranega operatorja. Pri tem je zanimivo, da se avtor članka [1] izogne definiciji konvolucije in protislovje izpelje na podlagi linearnosti konvolucije. To je glavni razlog, zaradi katerega predstavljeni protiprimer ne posega v realne primere uporabe konvolucije.

#### 5 Protiprimer in dokaz konvoluciskega teorema

Konstrukcija operatorja  $H_E$ , ki smo jo izdelali v prejšnjem poglavju, je res protiprimer konvolucijskemu

teoremu v dovolj ohlapni obliki. Enotino funkcijo  $\delta$  na  $\mathbb{R}^d$  smo uvedli v poglavju 3. Za operator  $H_E$  izračunamo impulzni odziv

$$h_E(\underline{t}) = (H_E\delta)(\underline{t}) = \lim_{\|\underline{s}\|_2 \rightarrow \infty} \delta(\underline{s}) = 0,$$

to je ničelna funkcija. Ker je očitno  $\delta \in \mathcal{F}_L$ , smo pri zgornjem izračunu uporabili kar definicijo operatorja  $H_L$ , saj velja  $H_E|_{\mathcal{F}_L} = H_L$ .

Konvolucija je linearna in za poljubno funkcijo  $f \in \mathcal{F}$  velja

$$(H_E f)(\underline{t}) = (h * f)(\underline{t}) = (0 * f)(\underline{t}) = 0.$$

Za konstantno funkcijo  $e(\underline{t}) = 1$  izračunamo  $(H_E e)(\underline{t}) = \lim_{\|\underline{s}\|_2 \rightarrow \infty} e(\underline{s}) = 1$ , kar je neničelna funkcija. Po konvolucijskem teoremu bi moralo veljati

$$(H_E e)(\underline{t}) = (h * e)(\underline{t}) = 0.$$

To je protislovje.

Kaj pokaže soočenje dokaza konvolucije in konstruiranega primera?

1. Družina funkcij  $\mathcal{F}$ , na katerih deluje linearen časovno invarianten sistem, ni vsebovana v družini  $\mathcal{L}^2$ . Npr.  $e(\underline{t}) \in \mathcal{F}$  in  $e(\underline{t}) \notin \mathcal{L}^2$ . S tem je inženirski pomen protiprimera zelo zmanjšan. Vzbujanja in odzivi  $f \in \mathcal{F}$  namreč v realno zanimivih primerih pomenijo fizikalne količine, katerih kvadratična norma  $\|f\|_2$  je neposredno povezana z energijo signala, ki je končna.
2. Konstruirani primer vendarle lahko uporabimo na družini s kvadratom integrabilnih funkcij  $\mathcal{L}^2$ . Iz  $\|f\|_2 < \infty$  namreč neposredno sledi  $\lim_{\|\underline{t}\| \rightarrow \infty} f(\underline{t}) = 0$  in zato  $f \in \mathcal{F}_L$ , torej tudi  $\mathcal{L}^2 \subset \mathcal{F}_L$ . Ker je za poljubno funkcijo  $f \in \mathcal{L}^2$  velja

$$(H_L f)(\underline{t}) = \lim_{\|\underline{s}\|_2 \rightarrow \infty} f(\underline{s}) = 0,$$

je konstruirani operator  $H_E$  na inženirsko zanimivem primeru ničeln,

$$H_E|_{\mathcal{L}^2} \equiv 0.$$

Zato za take primere ne služi za protiprimer konvolucijskemu teoremu, velja namreč

$$Hf = f * h.$$

Pri tem obe strani enačbe pomenita ničelno funkcijo in torej konvolucijski teorem velja.

3. Postavi se vprašanje, ali je mogoče po zgledu konstrukcije članka [1] konstruirati protiprimer konvolucije na družini funkcij  $\mathcal{L}^2$  ali pa definirati konvolucijo na družini funkcij, ki vsebuje funkcije, ki niso s kvadratom integrabilne.

Članek [1] navaja še druge primere linearnih sistemov, a za vse velja zgornji premislek. Vendarle ostane vprašanje, ali je mogoče konstruirati bistveno drugačne protiprimere konvolucijskemu teoremu, ki bi omejili njegovo uporabo v praksi. Teoretični dosežki glede predstavljenosti linearnih sistemov s konvolucijo, glejte npr. članek [8], kažejo v smer negativnega odgovora. To vprašanje bo podrobneje obdelano v naslednjem članku.

## 6 Ali ima enotina stopnica končno energijo?

V poglavju 2 smo povezali končno energijo signala  $f$  in kvadratično normo signala, za katero tedaj velja  $\|f\|_2 < \infty$ . Žal pa opazimo, da enotina stopnica  $1 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,

dana s predpisom  $1(\underline{t}) = \begin{cases} 1, & t_i \geq 0; \\ 0, & \text{sicer,} \end{cases}$  ne leži v prostoru  $\mathcal{L}^2$ .

Že v primeru  $d = 1$  namreč vidimo, da norma enotine stopnice ni omejena,

$$\|1\|_2 = \int_{\mathbb{R}} 1(t) dt = \int_0^{\infty} dt = \lim_{u \rightarrow \infty} u. \quad (2)$$

Limita ni omejena in enotina stopnica  $1(\underline{t})$  nima končne energije. Brez dvoma je signal  $1(\underline{t})$  praktično pomemben. Razlog za težavo  $1 \notin \mathcal{L}^2$  je v tem, da nas v praktičnih primerih zanima obravnava signalov v končnem časovnem intervalu, ki je vendarle poljubno velik.

Da bi rešili glavno trditev tega članka, uvedemo naslednjo formulacijo. Uvesti želimo družino signalov, ki bo (i) vsebovala vse omejene funkcije in (ii) dovoljeval definicijo konvolucije (to je definicijski integral (1) konvergiraj). Že razmislek glede norme enotine stopnice vodi do prave izbire. Da bi bila norma, izračunana z enačbo (2), končna, bi bilo treba omejiti integracijski interval. Zato uvedemo družino funkcij, katerih integrali kvadratov so končni za vse omejene množice,

$$\mathcal{L}_c^2 = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}; \int_K |f(\underline{t})|^2 d\underline{t} < \infty, K \text{ omejena}\}.$$

Neposredno se prepričamo, da družina vsebuje vse omejene signale in s tem tudi enotino stopnico,  $1 \in \mathcal{L}_c^2$ . Očitno velja tudi  $\mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}_c^2$  in  $\mathcal{L}^2 \neq \mathcal{L}_c^2$ . Žal pa kvadratična norma  $\|\cdot\|_2$  ni definirana na družini  $\mathcal{L}_c^2$ , s tem nastopi težava pri definiciji konvolucije na  $\mathcal{L}_c^2$ . Zato smo prisiljeni uvesti naslednjo omejitev. Naj bo  $K$  poljubna, a izbrana omejena podmnožica v  $\mathbb{R}^d$ . Zanj uvedemo družino funkcij

$$\mathcal{L}_K^2 = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}; \int_K |f(\underline{t})|^2 d\underline{t} < \infty\}.$$

Kvadratična norma na družini  $\mathcal{L}_K^2$  je dana s predpisom  $\|f\|_2 = \int_K |f(\underline{t})|^2 d\underline{t}$  in konvolucijo uvedemo s predpisom

$$(f * g)(\underline{t}) = \int_K f(\underline{\tau})g(\underline{t} - \underline{\tau})d\underline{\tau}.$$

Z neposrednim računom preverimo, da velja

$$\mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}_K^2 \subset \mathcal{L}_c^2.$$

Trditev, da družina  $\mathcal{L}_K^2$  vsebuje vse omejene signale, ne pomeni, da ne vsebuje posplošene funkcije enotin impulz  $\delta$ . Velja  $\delta \in \mathcal{L}_K^2$  in  $\|\delta\|_2 = 1$ .

Celoten razmislek o konvolucijskem teoremu, podan v tem članku, velja za družino funkcij  $\mathcal{L}_K^2$ . Torej konvolucijski teorem v klasični obliki velja za družino  $\mathcal{L}_K^2$ , kjer je  $K$  poljubna omejena podmnožica v  $\mathbb{R}^d$ . Praktična posledica omejenosti množice  $K$  je opazovanje sistema, ki ga predstavimo s konvolucijo, le znotraj končnega intervala. Ta interval je lahko poljubno velik, a mora biti izbran pred samo analizo sistema. Menimo, da je to dovolj širok okvir za analizo in sintezo linearnih sistemov.

## 7 Konvolucija na zaporedju (diskretni primer)

Ta članek obravnava konvolucijski teorem v primeru realnih funkcij vektorskega argumenta, ko je konvolucija dana z integralom. Kako je s konvolucijo v diskretnem primeru, to je na zaporedjih? Taka postavitev je zanimiva v okviru obdelave eno in več dimenzionalnih digitalnih signalov.

Pri obdelavi diskretnih signalov funkcije vektorskega argumenta  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  zamenjamo z diskretnimi funkcijami  $f: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d \in \mathbb{N}$  in  $d > 0$ . Enotin impulz  $\delta_d: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$  definiramo s predpisom

$$\delta_d(\underline{z}) = \begin{cases} 1, & \underline{z} = \underline{z}; \\ 0, & \underline{z} \neq \underline{z}. \end{cases}$$

Diskretno konvolucijo definiramo z izrazom

$$(f * g)(\underline{z}) = \sum_{\underline{w} \in \mathbb{Z}^d} f(\underline{z})g(\underline{z} - \underline{w}), \quad \underline{z} \in \mathbb{Z}^d.$$

Od tod naprej celoten razmislek o konvolucijskem teoremu, ki smo ga podali v prejšnjem poglavju, drži.

## 8 Sklep

V članku smo soočili protiprimer konvolucijskemu teoremu, navedene v članku [1], z uporabo konvolucije v analizi in sintezi sistemov. Pokazali smo, da za realne signale (signale s končno energijo) omenjeni protiprimeri niso v nasprotju s konvolucijo. Glavni razlog za to, da

predlagani protiprimer ne zadeva realnih primerov, je dejstvo, da njegova konstrukcija zaobide definicijo konvolucije v klasičnem pomenu. Dokaz namreč izpelje le na dejstvu, da je konvolucija linearna.

Vsekakor se strinjamo z avtorjem članka [1], da bi vsaj v teoretično bolj podprti literaturi ob predstavitvi konvolucijskega teorema veljalo dodati omejitve, pri katerih velja. Na drugi strani pa zaradi klasične oblike konvolucijskega teorema in njegove tipične uporabe menimo, da je uporaba izraza "konvolucijski škandal" pretirana.

S konvolucijo je tesno povezana definicija energije signala. Omejitev na kvadratično integrabilne signale iz obravnave izključimo nekatere zelo pomembne signale, kot je enotina stopnica. Zato se v članku posvečamo tudi uvedbi konvolucije v okviru, ki dovoljuje korektno definicijo konvolucije in hkrati vključuje vse omejene signale.

## 9 Literatura

- [1] Sandberg, I. W., *Continuous Multidimensional Systems and the Impulse response Scandal* Multidimensional Systems and Signal Processing, Kluwer AP, Vol 15, pp. 295-299, 2004.
- [2] Lahti, B. P. *Linear Systems and Signals* Oxford University Press, New York, 2005.
- [3] Proakis, J. G., Manolakis D. G. *Digital Signal Processing* Macmillan Publishing Company, USA, 1992.
- [4] Rudin, W., *Real and Complex Analysis* McGraw-Hill Inc., London, New York, 1970.
- [5] Rudin, W., *Functional Analysis* McGraw-Hill Inc., London, New York, 1991.
- [6] Fleming, W. H., *Functions of several variables* Springer Corp., New York, 1971.
- [7] Mlakar, J., *Linearna vezja in signali* Založba FER in FRI, Ljubljana, 2002.
- [8] Hughett, P., *Representation theorems for semilocal and bounded linear shift-invariant operators on sequences* Signal processing 67 (1998), pp. 199 - 209, Elsevier, 1998.

**Andrej Košir** je diplomiral leta 1993 na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo, Oddelek za matematiko in mehaniko, kjer je leta 1996 tudi magistriral. Doktoriral je leta 1999 na Fakulteti za elektrotehniko Univerze v Ljubljani. Zaposlen je kot asistent na Fakulteti za elektrotehniko. Področje njegovega raziskovalnega dela sega v postopke digitalne obdelave slik s podporo formalnih sistemov, optimizacijskih postopkov, statističnih metod in uporabe naravnih algoritmov.