*Elektrotehniški vestnik 75(1): 1–6, 2008*
*Electrotechnical Review, Ljubljana, Slovenija*

# Izomorfne naloge in preverjanje znanja

**Andrej Košir**

*Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko*
*Tržaška 25, 1000 Ljubljana*
*E-pošta: andrej.kosir@fe.uni-lj.si*

**Povzetek.** V članku predstavljamo pojem izomorfnih nalog in njihove vloge pri preverjanju znanja, predvsem v okviru testiranja in preverjanja znanja pri poučevanju na daljavo. Izomorfne naloge so naloge izbranega področja, ki so enake ali vsaj primerljive težavnosti reševanja (natančna definicija je podana v članku).
Vloga izomorfnih nalog v preverjanju znanja je izboljšana kakovost pridobljenih ocen, saj slušateljem onemogočajo ali vsaj otežijo nedovoljeno sodelovanje pri izdelavi odgovorov, kar je pomemben vidik pri učinkovitosti celotnega procesa poučevanja in učenja. Poleg tega uvedba pojma izomorfnosti omogoča načrtovanje in izvedbo nadzorovanega generatorja naključnih nalog, ki omogoča naključno generiranje večjega števila nalog primerljive težavnosti.

V članku predstavljamo natančno formulacijo izomorfnih nalog s ponazoritvijo na primeru linarnih električnih vezij. Ta temelji na vpeljavi naloge s postopkom reševanja in določitvi njene težavnosti glede na težavnosti posameznih korakov reševanja. Poleg tega predstavljamo implementacijo generatoja nalog s področja linearnih električnih vezij z vnaprej predpisano težavnostjo reševanja.

**Ključne besede:** izomorfne naloge, učenje na daljavo, e-učenje

# Isomorphic assignments and knowledge assessment

**Extended abstract.** In this paper we deal with theoretical issues of equally difficult assignments (tasks) given to students and an automatic generation of equally difficult assignments in the context of the classic and distance-learning environment. Using the abstract concept of isomorphisms, we introduce isomorphic assignments as being equivalent or at least comparably difficult in terms of finding their solutions. First we define the assignment as a pair $(\mathcal{B}, \mathcal{P})$ where $\mathcal{B}$ is the description of the assignment and $\mathcal{P}$ is the sequence of steps one has to take in order to find its solution. Isomorphic assignments are then defined as assignments from a chosen area that have the same or at least comparable difficulty of finding their solution (exact definition follows in the paper).

The role of isomorphic assignments in the field of fair knowledge assessments is to enhance quality of assessments in terms of comparability of the estimated marks given to different students of the underlying course. We expect that the rate of undesired or illegal collaborations between students can be significantly lowered by using isomorphic assignments. This is one of the important aspects of the learning process. Besides, the concept of isomorphic assignments provides a theoretical background for design and application of a random generation of isomorphic assignments. Such generator can be used to produce a larger number of isomorphic assignments.

In this paper we introduce an exact definition of isomorphic assignments together with an educational example from the field of linear electric circuit analysis. We define difficulty of a given assignment by mapping the sequence of solution steps into non-negative real numbers. We also present guidelines for a random generator of isomorphic assignments with a predefined level of difficulty.

**Key words:** isomorphic assignments, distance learning, e-learning

*Prejet 3. julij, 2007*
*Odobren 4. december, 2007*

## 1 Uvod

Razvoj sodobnih informacijskih tehnologij je ustvaril tehnološke možnosti za učenje na daljavo. Že prve izkušnje so pokazale, da je uporaba informacijskih tehnologij pri pedagoškem delu za vse vpletene zahtevnejša kot bi pričakovali. Dejstvo je, da učenje na daljavo pomeni velik poseg v kompleksen proces učenja v različnih vidikih. Po sami naravi je učinkovito poučevanje in učenje povezano z najrazličnejšimi dejavniki in je tesno vezano na izkušnje učiteljev [1]. Pomen učenja na daljavo za sodobno družbo so zbrali avtorji Unescove publikacije Open and distance learning [2]. Številne odlične univerze in ustanove ponujajo učenje na daljavo, npr. Open university inštituta MIT [3] in Univerza v Oxfordu [4]. Slednja je okoli lastnega produkta tehnološke rešitve zbrala več kot dva tisoč univerz, ki si po lastnih željah in dogovorih izmenjujejo pripravljena učna gradiva. Učenje na daljavo je uporabno tudi na področju permanentnega izobraževanja, izobraževanja v tretjem življenjskem obdobju ipd.

Učenje na daljavo in podporne tehnologije brez dvoma spreminjajo vse oblike izobraževanja, tudi klasično izobraževanje na univerzah [5]. Evalvacija učinkovitosti izobraževanja na daljavo zahteva precej spremenjeno metodologijo v primerjavi z ocenjevanjem klasičnega izobraževanja [6]. Evalvacijo uspešnosti učenja na daljavo, podprto s statistično analizo, predstavlja delo [7] in ugotavlja, da v primerjavi s klasičnim izobraževanjem ni signifikantnih razlik.

Strokovnjaki s področja informacijskih trehnologij se žal še vedno niso poenotili glede nekaterih osnovnih pojmov. Na to kažejo številni izrazi, ki se uporabljajo in se po opisih le delno ujemajo. V rabi najdemo e-učenje (ang. e-learning), e-poučevanje (ang. e-teaching), e-izobraževanje (ang. e-education), računalniško podprto izobraževanje (ang. computer based learning), učenje na daljavo (ang. distance education), spletno izobraževanje (ang. web education), multimedijsko izobraževanje (ang. multimedia eduacation) itd. [8]. V tem članku uporabljamo izraze učenje na daljavo (ne glede na stopnjo izobraževanja in njegovo formalno obliko), učitelj in slušatelj oz. slušatelji, naloga in test. Test preprosto opišemo kot skupek nalog poljubnih tipov.

Eden od vsaj delno nerešenih problemov učenja na daljavo je tudi preverjanje znanja slušateljev. Vsem spremembam na področju pedagoške in andragoške znanosti navkljub ostaja resno in konkretno preverjanje znanja slušateljev pomemben element učenja na daljavo kot celote. Vpliva na delo učiteljev in slušateljev in tudi na celovito podobo učnega procesa. Ena od zahtev za vsako korektno (pošteno) ocenjevanje je primerljivost ocen različnih kandidatov oziroma nepristranost ocenjevanja v posameznih skupinah. Ena od rešitev problema preverjanja v okviru učenja na daljavo so tudi izomorfne naloge. Izomorfne naloge so koncept, pri katerem na podlagi izbrane naloge ali izbrane težavnosti naloge danega področja izdelamo nabor večjega števila različnih, a za reševanje enako težkih nalog. Tak nabor imenujemo nabor izomorfnih nalog. Navadno so namenjene slušateljem iz iste skupine študija. Ker so enako težke za reševanje, so z njihovim ocenjevanjem pridobljene ocene med sabo nepristranske in primerljive.

V članku predstavljamo koncept izomorfnih nalog, ki vključuje tudi določitev njihove težavnosti. Kot ilustracijski primer obravnavamo primer analize linearnega električnega vezja v klasični (časovni) analizi. V drugem poglavju predstavljamo koncept izomorfnih nalog na izbranem razredu nalog. Vpeljemo pojem naloge s postopkom in določitev njene težavnosti. Tretje poglavje prinaša natančnejšo analizo konkretne naloge za ilustracijo splošnejših prijemov. V četrtem poglavju obravnavamo generator nakjučnih nalog izbrane težavnosti, v petem predstavljamo sklep in nadaljnje delo.

Članek smo zasnovali tako, da osnovno idejo izomorfnih nalog povzame tudi bralec, ki analize linearnih vezij ne pozna in ga ta tudi ne zanima.

## 2 Postavitev problema

Sodobne informacijske tehnologije so hkrati z velikimi obeti in možnostmi pred učitelje postavile velik izziv. Ko je informacijska in komunikacijska tehnologija ponudila nove tehnološke možnosti, so se naglo razvile tudi ideje za njihovo uporabo. Te vključujejo vse, od podpore klasičnega načina poučevanja do različnih načinov učenja na daljavo. Poseben problem v okviru elektronske podpore učenja je preverjanje in ocenjevanje znanja. Uporabljena tehnologija naj slušateljem omogoča, da na daljavo brez prisotnosti učitelja obvezno ali neobvezno preverjajo svoje znanje. S tem se pokaže potreba po velikem številu nalog izbranega področja z znano in primerljivo težavnostjo reševanja. Od tod izhaja ideja izomorfnih nalog, ki so enake ali vsaj primerljive težavnosti in katerih težavnost je poznana (določljiva). Učinkovita rešitev omenjenih težav je generator naključnih nalog (poglavje 4).

V okviru tega članka primerljivo težavnost nalog vpeljemo na podlagi primerljivih težavnosti korakov njihovega reševanja. Za izbran razred nalog natančno določimo korake reševanja in določimo težavnosti posameznih korakov reševanja, podrobnosti sledijo v podpoglavju 3.4. Od tod med drugim sledi omejitev splošnosti uporabe izomorfnih nalog - na predlagani način lahko po težavnosti primerjamo le naloge istega razreda (z dovolj sorodnimi postopki reševanja). Čeprav ima izračunana težavnost številsko vrednost, ima pomen le v tem razredu nalog. Za dosego primerljivosti težavnosti z nalogami zunaj tega razreda je treba poiskati povezavo (pretvorbo) med razredoma, katerih naloge želimo primerjati. To je mogoče le na podlagi statističnih metod [9]. S tem problemom se v okviru tega članka ne ukvarjamo, uvrstili smo ga med nadaljnje delo.

Kot bo razvidno iz konstrukcije, razred sorodnih nalog imenujemo nabor nalog, katerih poteki reševanja so dovolj podobni, da dovoljujejo nominalno primerjavo težavnosti. Po naših izkušnjah so na tak način neposredno primerljive le naloge z ozkega področja izbrane problematike. V našem ilustrativnem primeru s področja analize linearnih električnih vezij so tako primerljive le naloge iz električnih vezij, pri katerih je metoda reševanja vnaprej razvidna ali predpisana [10], [11].

Praktična izvedba pedagoškega dela kaže, da nas zanimajo primerljivo težavni testi (test je skupek nalog) in ne le primerljivo težavne naloge. Test preprosto opišemo kot skupek nalog. Tako v konstrukciji tega članka ne ločujemo posameznih nalog in testov v smislu, da privzamemo, da je test naloga z enim ali več vprašanji.

## 3 Izomorfne naloge

V tem poglavju bomo natančno definirali pojem izomorfnih nalog. Vpeljali bomo pojem izomorfizma $\psi$ na množici nalog $W$ izbranega področja. Kot se bo izkazalo, ta nujno vključuje postopek reševanja naloge po korakih $K_1, K_2, \dots K_m$ in vpeljavo razredov težavnosti posameznih korakov $C_i^j$ ($j$-ta težavnost koraka $K_i$, podrobnosti pozneje).

### 3.1 Izomorfizem v abstraktnem pogledu

V abstraktnem pogledu je izomorfizem bijektivni homomorfizem. Vpeljemo ga kot preslikavo med algebrskima strukturama z vsaj eno binarno operacijo $(A, \circ_A)$ in $(B, \circ_B)$, kjer sta $\circ_A$ in $\circ_B$ ti operaciji. Preslikava $\psi : (A, \circ_A) \to (B, \circ_B)$ je homomorfizem, če za poljubna elementa $x, y \in A$ velja

$$\psi(x \circ_A y) = \psi(x) \circ_B \psi(y). \tag{1}$$

Izomorfizem je bijektivni homomorfizem. Strukturi $(A, \circ_A)$ in $(B, \circ_B)$ sta lahko enaki, $\psi : (A, \circ_A) \to (A, \circ_A)$. Najbolj poznani in raziskani so izomorfizmi grup, kolobarjev, obsegov, vektorskih prostorov in alge-ber [12].

V okviru dela z izomorfnimi nalogami na mestu algebrske strukture vpeljemo množico nalog z enakim postopkom reševanja, na mestu binarne operacije pa sestavljanje vprašanj (nizanje drugega za drugim) v obsežnejše teste.

### 3.2 Naloga s postopkom in določljivo težavnostjo

Za natančnejšo vpeljavo izomorfizma med nalogami potrebujemo formalno definicijo naloge, ki vključuje tudi postopek reševanja z določljivo težavnostjo. Zgled za pojasnilo je naloga s področja analize linearnih električnih vezjih, ki jo predstavljamo v podpoglavju 4.1.

Formalna predstavitev naloge je par $a = (\mathcal{B}_a, \mathcal{P}_a) \in W$, kjer je $\mathcal{B}_a$ besedilo naloge (besedilo, slike, pojasnila ipd.) in $\mathcal{P}_a$ je njen postopek reševanja $\mathcal{P}_a = (K_1, K_2, \ldots, K_m)$, kjer so $K_i$ koraki reševanja. Pri tem za vsak korak $K_i$ določimo težavnostni razred. Te za korak $K_i$ označimo s $C_i^1, \ldots, C_i^{r_i}$, $i = 1, \ldots, m$.

Vsak korak reševanja ima težavnost, ki jo označimo z $\eta : K_i \mapsto \mathbb{N}$. V dan razred težavnosti $C_i^j$ v koraku $K_i$ spadajo naloge, ki imajo v koraku $K_i$ težavnost $\eta(K_i) = j$. Naj ponovimo, da ima tako definirana težavnost naloge smisel in pomen le v izbranem razredu nalog.

Navadno se v praksi izkaže, da je težavnost več korakov reševanja določena z isto lastnostjo (parametrom) naloge. Npr. pri reševanju linearnih sistemov red sistema določi red diferencialne enačbe, ta pa težavnost več korakov v nadaljevanju reševanja. Tedaj je težavnost vseh korakov naloge mogoče opisati z izbranimi parametri, ki se od koraka do koraka ponavljajo (npr. težavnost 2. in 4. koraka opisuje isti parameter). Da bi izločili to redundanco, vpeljemo *nabor karakterističnih parametrov* naloge $\xi(\mathcal{B}_a, \mathcal{P}_a) = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, ki je vektor realnih ali celih števil in je minimalni nabor, ki določi težavnost vseh korakov reševanja. Vsak razred nalog ima torej lasten nabor karakterističnih parametrov in ta v celoti določa njegovo težavnost.

Težava natančnega opredeljevanja korakov reševanja je med drugim v tem, da je navadno mogoče nalogo izbranega razreda reševati na več načinov. Zato korake reševanja opredelimo tako, da so skupni vsem načinom reševanja ali pa dovolimo (vpeljemo) več delno ali povsem različnih načinov reševanja danega tipa nalog.

### 3.3 Težavnost naloge

Težavnost naloge $\eta(\mathcal{B}_a, \mathcal{P}_a)$ je dana s kombinacijo težavnosti posameznih korakov reševanja te naloge $(\eta(K_1), \ldots \eta(K_m))$. Zaradi enostavnosti uporabimo linearno kombinacijo težavnosti posameznih korakov,

$$\eta(\mathcal{B}_a, \mathcal{P}_a) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \eta_i(K_i). \tag{2}$$

Koeficienti $\alpha_i$ so prispevki težavnosti posameznih korakov k skupni težavnosti naloge. Določimo jih lahko na podlagi izkušenj (npr. uspešnost reševanja nalog izbranega tipa v preteklosti) ali pa z uporabo statističnih metod s področja pedagoškega dela [9]. Koeficienti $\alpha_i$ so v splošnem nenegativna realna števila in težavnost je preslikava množice nalog $W$ v nenegativna realna števila

$$\eta : W \to \mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Da bi dosegli primerljivo težavnost med nalogami različnih razredovj je koeficiente $\alpha_i$ dobro kvantificirati, s čimer dosežemo končno mnogo mogočih različnih težavnosti izbrane naloge. Privzeti je mogoče tudi celoštevilske vrednosti koeficientov $\alpha_i$.

Prispevek težavnosti posameznega razreda k težavnosti celotne naloge je lahko zelo različen, kar se kaže v zelo različnih velikostih koeficientov $\alpha_i$. Poseben problem izračuna skupne težavnosti na podlagi težavnosti posameznih korakov je soodvisnost korakov reševanja (npr. zastoj pri enem koraku onemogoči nadaljevanje reševanja), kar upoštevamo pri izbiri koeficientov $\alpha_i$ v enačbi (2). Konkretnejših napotkov za določanje koeficientov $\alpha_i$ tu zaradi omejitve prostora ne navajamo.

### 3.4 Izomorfne naloge

Izhodišče za vpeljavo izomorfnosti nalog $a, b \in W$ je enaka (ali vsaj primerljiva) težavnost. Nalogi $a, b$ sta izomorfni, če imata enaki težavnosti $\eta(a) = \eta(b)$. Glede na konstrukcijo naloge s postopkom definiramo (podpoglavje 3.2), da sta nalogi $a, b \in W$ izomorfni natanko tedaj, ko imata enak nabor karakterističnih parametrov, torej

$$a = (\mathcal{B}_a, \mathcal{P}_a) \simeq b = (\mathcal{B}_b, \mathcal{P}_b) \quad \stackrel{d}{\Longleftrightarrow} \quad \xi(a) = \xi(b). \tag{4}$$

Pri praktični uporabi iskanja izomorfnih nalog je ugodneje uporabljati nabor karakterističnih parametrov $\xi$, ne pa samo zahtevnost naloge $\eta$. Ta namreč pove o nalogi vse, kar potrebujemo kot vhodni podatek za njeno konstrukcijo (izdelavo).

Izomorfizem v abstraktnem pogledu vključuje binarno operacijo $\circ$ na izbrani množici nalog, glejte podpoglavje 3.1. Kakšna je smiselna definicija te binarne operacije pri izomorfnih nalogah $W$? Natančnejši premislek pokaže, da nas pri praktični izvedbi pedagoškega dela zanimajo primerljivo težavni testi in ne nujno le primerljivo težavne naloge. Operacijo $\circ$ definiramo kot sestavljanje vprašanj oziroma nalog. Tako definiramo $a \circ b \in W$ kot skupek vprašanj, ki jih prinašata skupek vprašanj $a$ in skupek vprašanj $b$ skupaj. Torej je $\circ$ operacija sestavljanja oziroma nizanja vprašanj.

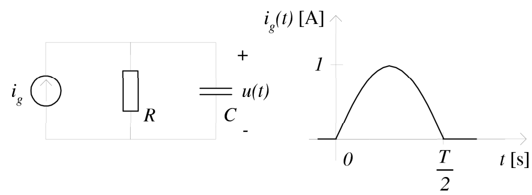
Definicijska lastnost izomorfizma $\psi(a \circ b) = \psi(a) \circ \psi(b)$ tedaj pomeni, da sta nalogi $a \circ b$ in $\psi(a) \circ \psi(b)$ izomorfni, torej enako težki. $a$ in $b$ sta dela naloge (del vprašanj) naloge $a \circ b$. S preprostejšimi besedami, če enega ali več vprašanj (delov nalog) zamenjamo z njemu izomorfnimi (enako težkimi) vprašanji, ostane težavnost naloge enaka. To je potreben pogoj za smiselnost celotne konstrukcije izomorfnih nalog.

## 4 Izomorfne naloge iz analize linearnih električnih vezij

V tem poglavju predstavljamo konkreten primer naloge s postopkom s področja analize električnih vezij za pojasnitev ideje izomorfnih nalog.

### 4.1 Klasična analiza linearnih električnih vezij

Kot ilustracijski primer vzemimo nalogo $a_0$ z besedilom $\mathcal{B}_{a_0}$ = "Izračunajte odziv vezja $u(t)$ na vzbujanje $i_g(t)$ za vezje na sliki".




Slika 1. Analizirano linearno vezje z odzivom $u(t)$

Gre za preprosto vezje, pri katerem v klasični analizi iščemo napetost na kondenzatorju kot odziv na vzbujanje neodvisnega napetostnega vira, podroben postopek njenega reševanja najdemo v [11].

Potek reševanja $\mathcal{P}_{a_0}$ je izračun odziva linearnega vezja s klasično (časovno) analizo, ki je dan s tabelo 1. Tu je število korakov enako $m = 6$. Podrobnosti glede iskanja odziva vezja v klasični analizi najdemo v [10], [13]. V splošnem iščemo odziv vezja $y$ na vzbujanje $x$. Pri omenjeni nalogi je $x = i_g$ in $y = u$. Oznaka $D$ predstavlja

| Korak | Opis | Opis težavnosti |
|---|---|---|
| $K_1$ | Opis vezja z eno od treh metod | (N, B, C) |
| $K_2$ | Zapis LDE v kanonični obliki $p(D)x = q(D)y$ | Red $n$ |
| $K_3$ | Izračun homogene rešitve $y_h$ s prostimi konstantami | Red $n$ |
| $K_4$ | Izračun začetnega stanja vezja | Red $n$ |
| $K_5$ | Izračun partikularne rešitve $y_p$ | Razred funkcije $q(D)y$ |
| $K_6$ | Izračun posebne rešitve (odziva) $y$ | Red $n$ |

Tabela 1. Primer korakov reševanja in razredov

simbolični operator odvajanja po času, $p$, $q$ sta realna polinoma. Red nehomogene linearne diferencialne enačbe (LDE) $p(D)x = q(D)y$ označimo z $n$.

Vsak korak $K_i$ ima definirane razrede težavnosti $C_i^j$. Tu se splošnost uporabnosti naše postavitve konča, saj so razredi težavnosti bistveno odvisni od narave korakov reševanja. Za primer si pobliže oglejmo opise težavnosti v tabeli 1.

**Korak** $K_1$. Težavnost opisa vezja je dana s številom vozlišč vezja $N$, številom vej $B$ in številom oken $C$ (če je vezje ravninsko). Izbiramo med zančno (št. enačb je $C$) in vozliščno metodo (št. enačb $N-1$) in izberemo tisto z najmanjšim številom enačb. Težavnost koraka $K_1$ je tako dana s številom enačb, torej $\eta(K_1) = \min\{N-1, C\}$.

**Korak** $K_2$. Težavnost zapisa LDE je odvisna od njenega reda $n$, ta pa od števila reaktivnih elementov v vezju (tuljav in kondenzatorjev). Težavnost je enaka $\eta(K_2) = n$.

**Korak** $K_3$. Izračun homogenega dela odziva $y_h$ vključuje iskanje ničel realnega polinoma $p(x)$. Težavnost je dana z redom polinoma $p$, ki je enaka redu LDE $n$. Težavnost je torej enaka $\eta(K_3) = n$.

**Korak** $K_4$. Izračun začetnega stanja vezja zahteva izračun vrednosti $y(t_0), Dy(t_0), \ldots D^{n-1}y(t_0)$, kjer je $t_0$ začetni čas (navadno je $t_0 = 0s$). Pri nalogah, primernih za ročno reševanje, je navadno $n \leq 2$. Težavnost je spet enaka $\eta(K_4) = n$.

**Korak** $K_5$. Težavnost izračuna partikularne rešitve $y_p$ je odvisna od tipa funkcije $q(D)x$ da desni strani LDE. Za oceno težavnosti te časovne funkcije razvrstimo v razrede glede na parametriziran nastavek. Glede na postopek reševanja vpeljemo razrede $R_p^1 = \{\text{konstante}\}$, eksponenti $R_p^2 = \{Ke^{\delta t}\}$, harmonične funkcije $R_p^3 = \{K\cos(\omega t + \varphi)\}$, $R_p^4 = \{\text{polinom } g(t)\}$ izbrane stopnje itd. Vsak od teh razredov pri reševanju pomeni drugo težavnost reševanja. Pri dani nalogi razred funkcij na desni strani LDE označimo z njegovim indeksom $\kappa$, torej indeks razreda $R_p^3$ je $\kappa = 3$. Težavnost tega koraka je $\eta(K_5) = \kappa$.

**Korak** $K_6$. Posebno rešitev, ki je enaka odzivu, poiščemo s pomočjo reševanja sistema enačb za neznane konstante homogene rešitve. Težavnost je dana z redom LDE $n$ in razredom funkcij $R_p^k$, ki se pojavijo v partikularni rešitvi. Težavnost je $\eta(K_6) = n$.

Opazimo, da so težavnosti korakov $K_2, K_3, K_4$ in $K_6$ enake $n$ (ki je red sistema). To ne pomeni, da so prispevki teh korakov k celotni težavnosti naloge enaki. Višine njihovih prispevkov k težavnosti uravnavamo s koeficienti $\alpha_i$ v enačbi (2).

Pregled težavnosti korakov $K_1, \ldots, K_6$ pokaže, da so odvisni od oziroma podani s parametri $N$, $B$, $C$, $n$ in $\kappa$. Zato je nabor karakterističnih parametrov naloge iz klasične analize linearnega električnega vezja enak $\xi(\mathcal{B}, \mathcal{P}) = (N, B, C, n, \kappa)$. Pri predstavljeni nalogi torej $\xi(\mathcal{B}_{a_0}, \mathcal{P}_{a_0}) = (2, 3, 1, 1, 3)$.

Glede na konstrukcijo v podpoglavju 3.4 in definicijo (4) sta nalogi iz klasične analize linearnih vezij izomorfni tedaj, ko imata enak nabor karakterističnih parametrov.

### 4.2 Rešljivost (smiselnost) linearnega električnega vezja

Znano je, da poljubno izbrano linearno vezje ni nujno smiselno, to je ni ga mogoče realizirati. Tak primer je vezje, ki vsebuje kratko sklenjen neodvisen napetostni generator neničelne napetosti. Privzamemo, da je vezje smiselno natanko takrat, ko je rešljiv sistem enačb, ki ga opisuje. Ta privzetek je mogoče natančneje utemeljiti, kar bomo predstavili v nadaljnjih prispevkih.

Da bi natančneje obravnavali ta problem, vpeljemo matrično formulacijo enačb, s katerimi opišemo vezje. Ta temelji na vozliščni metodi opisa vezja [10], ki je uporabna za vsa vezja (vejna in zančna metoda sta uporabni le za ravninska vezja). Matrična enačba vozliščne metode je

$$\mathbf{Y}_v(D)\mathbf{u}_v = \mathbf{i}_{vg}, \tag{5}$$

kjer je $\mathbf{u}_v$ vektor vozliščnih napetosti, $\mathbf{i}_{vg}$ vektor vozliščnih tokovnih virov in $\mathbf{Y}_v(D)$ vozliščna matrika napetostnih operatorjev (vsebuje simbolični operator odvaja na čas $D$).

Za poenostavitev postopka je mogoče premisliti, da je sistem (5) rešljiv natanko tedaj, ko je rešljiv prirejen sistem

$$\mathbf{Y}_{vp}\mathbf{u}_v = \mathbf{i}_{vg}, \tag{6}$$

kjer je $\mathbf{Y}_{vp}$ prirejena vozliščna matrika. To je matrika, ki pri opisu z vozliščno metodo pripada prirejenemu vezju, ki ga iz originalnega dobimo tako, da vse upore, tuljave in kondenzatorje nadomestimo z upori z vrednostjo $1\Omega$ ter izberemo naključne številske vrednosti parametrov krmiljenih virov. S tem smo izdelali uporaben kriterij za preverjanje smiselnosti vezja: vezje je smiselno, če je sistem navadnih enačb (6) rešljiv, to je le če sta ranga njegove osnovne in razširjene matrike enaka. Za izračun rang matrike uporabimo Gaussov algoritem z zahtevnostjo $\mathcal{O}(m^3)$ [14], kjer je $m = \min\{N-1, C\}$ število enačb prirejenega sistema (6).

### 4.3 Težavnost reševanja naloge linearnega električnega vezja

Težavnost naloge analize linearnega električnega vezja v klasični (časovni) analizi je dana z njenim naborom karakterističnih parametrov $\xi(v) = (N, B, C, n, \kappa)$. Videli smo (podpoglavje 4.1), da je določena z vrednostmi $\min\{N-1, C\}$, $n$ in $\kappa$. Enačba (2) se tako poenostavi v $\eta(v) = \beta_1 \min\{N-1, C\} + \beta_2 n + \beta_3 \kappa$. V povezavi z enačbo (2) smo upoštevali $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6$ in $\beta_3 = \alpha_5$.

## 5 Generator nalog z izbrano težavnostjo

### 5.1 Uvod

Izdelava nalog izbrane težavnosti je zahtevno in časovno potratno tako v klasičnem izobraževalnem procesu kot v okviru učenja na daljavo. Ker v slednjem primeru učitelj ni prisoten pri preverjanju znanja, ki poteka na daljavo, med slušatelji prihaja do nedovoljenega sodelovanja. To je mogoče omiliti z izdelavo večjega števila nalog primerljive težavnosti, kar bi idealno opravil generator naključnih nalog z vnaprej določeno težavnostjo. V tem poglavju predstavljamo osnovni okvir za generator nalog izbrane težavnosti oz. izbranega nabora karakterističnih parametrov, torej izomorfnih nalog.

Za izbrano nalogo $a_0 \in W$ z naborom karakterističnih parametrov $\xi(a_0)$ želimo izdelati izbrano število $N$ nalog

$$\mathrm{IsN}(a_0, N) = \{a \in W : a \simeq a_0\}. \tag{7}$$

### 5.2 Generator naključnih nalog

Naj bo $(\Omega, P)$ diskreten verjetnostni prostor ($\Omega$ je diskretna množica in $P : 2^\Omega \to [0,1]$ verjetnostna mera, $2^\Omega$ je potenčna množica množice $\Omega$) [15]. Generator naključnih nalog predstavimo s slučajno spremenljivko $\Phi : (\Omega, P) \to W$. Implementacija generatorja naključno izbranih nalog je tesno povezana s samo naravo nalog izbranega razreda. Splošneje uporaben postopek predstavlja algoritem 1. Vhod v algoritem je izbran nabor karakterističnih parametrov $\xi(a_0)$, s čimer je določena tudi težavnost generirane množice nalog $\eta(a_0)$, in število nalog $N$, ki jih želimo generirati. Rezultat algoritma je $N$ izomorfnih nalog danega nabora karakterističnih parametrov.

Za ilustracijo predstavljamo generator naključnih nalog analize linearnih električnih vezij s klasično analizo (podpoglavje 4.1). Vhod v algoritem generatorja naključnih nalog je nabor karakterističnih parametrov $\xi(a) = (N, B, C, n, \kappa)$.

**Algoritem 1** Naključni generator nalog

$n = 1, \text{IsN}(a_0, N) = \{\}$;
**while** ($n \leq N$) **do**
  Naključno izberemo primerek naloge $a$ z $\xi(a) = \xi(a_0)$;
  **if** ($a$ smiselna) **then**
    $n = n + 1$;
    $\text{IsN}(a_0, N) = \text{IsN}(a_0, N) \cup \{a\}$;
  **end if**
**end while**

**Algoritem 2** Naključni generator nalog iz analize linearnih vezij

$n = 1, \text{IsN}(a_0, N) = \{\}$;
**while** ($n \leq N$) **do**
  Naključno izberemo graf s parametri $(N, B, C)$. Označimo mu vozlišča, veje in okna (oznake in usmeritve);
  Vejam priredimo elemente, ki jih naključno izberemo izmed $R, L, C$, neodvisni generator $i_g$, $u_g$ ter krmiljeni generator $i_g$, $u_g$ (oba tipa krmiljenja). Neodvisne generatorje določimo glede na izbran razred desnih strani $\kappa$;
  Na podlagi vnaprej predpisanih diskretnih vrednosti elementov določim velikosti elementov ali se odločimo za simbolično reševanje nalog;
  Izberemo iskani odziv (npr. vejno napetost);
  Na podlagi vzorcev določimo besedilo vaje $a$ in izdelamo spremljajoče slike vezij in vzbujanj.
  **if** ($a$ smiselna) **then**
    $n = n + 1$;
    $\text{IsN}(a_0, N) = \text{IsN}(a_0, N) \cup \{a\}$;
  **end if**
**end while**

## 6 Sklep in nadaljnje delo

V članku smo predstavili koncept izomorfnih nalog na podlagi vsaj primerljive težavnosti njihovega reševanja. Izhodiščna ideja izhaja iz problema ocenjevanja pri učenju na daljavo, rezultati so uporabni tudi v klasičnih oblikah poučevanja. Predlagamo tudi postopek za implementacijo naključnega generatorja izomorfnih nalog.

Predlagana konstrukcija je v začetni fazi razvoja. Gre za posplošitev idej, ki smo jih uporabili pri poskusni implementaciji generatorja naključno izbranih nalog s področja analize linearnih vezij (ilustracijski primer v poglavju 4). Temelji na učiteljevi predpostavki o težavnostih posameznih korakov izbranih nalog.

Nadaljnje delo vključuje vpeljavo in ovrednotenje primerljivosti težavnosti nalog različnih razredov (naloge z bistveno različnimi poteki reševanja). Načrtujemo tudi statistično korektno ovrednotenje predlagane konstrukcije, predvsem predpostavk o enaki težavnosti nalog z enakim naborom karakterističnih parametrov. Tako preverjanje je izvedljivo le za izbrani razred nalog. Že v sami konstrukciji izomorfnih nalog potrebujemo nadaljnjo razdelavo znanih tipov nalog, kot npr. naloge objektivnega tipa [9].

## 7 Literatura


[1] Moore, M. G., Kearsley, G. *Distance Education: A Systems View*, Second edition, Thomson Wadsworth, Belmont, CA, USA, 2005.

[2] Unesco *Open and Distance learning*, Unesco divisoion of higher education, Paris, 2002.

[3] MIT *Spletna stran MIT OpenCourse*, http://ocw.mit.edu/index.html, Dostopano 26.06.2007.

[4] Univerza v Oxfordu *Spletna stran Online courses*, http://onlinecourses.conted.ox.ac.uk/, Dostopano 26.06.2007.

[5] Moxley, V. M., Maes, S. C. *The Great Plains Interactive Distance Education Alliance*, Continuing higher education review, Vol. 67, Kansas State University, USA, 2003.

[6] Lockee, B., Moore, M., Burton, J. *Measuring Success: Evaluation Strategies for Distance Education*, Educause quarterly, Num. 1., 2002.

[7] Cavanaugh, C., Kathy J. G., Kromrey, J., Hess, M., Blomeyer, R., *The Effects of Distance Education on K–12 Student Outcomes: A Meta-Analysis*, Learning Points Associates, Illinois, USA, 2004.

[8] Kragelj, S. *Tehnologija na prepihu: Spletno, internetno, multimedijsko?*, E-mesečnik Internet in izobraževanje, št. 2, http://www.e-izobrazevanje.com/izdaja_02.php, Dostopano 01.05.2007.

[9] Sagadin, J. *Poglavja iz metodologije pedagoškega raziskovanja*, Zavod Republike Slovenije za šolstvo in šport, Ljubljana, 1993.

[10] Mlakar, J. *Linearna vezja in signali*, Založba FER in FRI, Ljubljana, 2002.

[11] Koširr, A. *Linearna vezja in signali, zbirka rešenih vaj*, Založba FER in FRI, Ljubljana, 2006.

[12] Herstein, I. N. *Topics in Algebra*, John wiley & Sons, New York, 1975.

[13] Lahti, B. P. *Linear Systems and Signals*, Oxford University Press, New York, 2005.

[14] Bohte, Z. *Numerične metode*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov RS, Ljubljana, Slovenija 1987.

[15] Karlin, S., Taylor, H. M., *A first course on stochastic processes*, Academic Press, Boston, 1975.



**Andrej Košir** je diplomiral leta 1993 na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo, Oddelek za matematiko in mehaniko, kjer je leta 1996 tudi magistriral. Doktoriral je leta 1999 na Fakulteti za elektrotehniko Univerze v Ljubljani. Zaposlen je kot asistent na Fakulteti za elektrotehniko. Področje njegovega raziskovalnega dela sega v postopke digitalne obdelave slik s podporo formalnih sistemov, optimizacijskih postopkov, statističnih metod in uporabe naravnih algoritmov ter modeliranja uporabnikov.