

Izbira optimalnih podstruktur nerekurzivnega digitalnega sita v porazdeljeni aritmetiki

Mitja Solar, Rudolf Babič, Bruno Stiglic

Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko,
Smetanova ul. 17, 2000 Maribor, Slovenija

E-pošta: mitja.solar@uni-mb.si, rudolf.babic@uni-mb.si

Povzetek. Nerekurzivna digitalna sita v porazdeljeni aritmetiki in aritmetiki s fiksno decimalno vejico se uporabljajo v hitrih sistemih za digitalno obdelavo podatkov, kjer se zahteva stabilnost odzivov in linearne fazne poteke pri zahtevanem velikem dušenju ali veliki strmini bokov. Med različnimi realizacijskimi oblikami smo primerjali kaskadno, vzporedno in kombinirano realizacijsko obliko. Primerjali smo frekvenčne lastnosti, kvantizacijski šum in aparaturno kompleksnost.

Ključne besede: nerekurzivna digitalna sita, porazdeljena aritmetika, optimalne podstrukture, vplivi kvantizacije

Selection of an optimal substructure in the distributed arithmetic FIR Digital Filter

Extended abstract. For digital signal processing in high-speed systems FIR digital filters are used, especially in applications where linear time-invariant stable response and linear phase are needed. A fixed point arithmetic is applied in such systems. The hardware main problem in the design of high-speed FIR digital filters is the complexity. In practical realizations of FIR digital filters, the circuits contain many adders, inverters, registers and multipliers. Among these basic digital elements, the multiplier has most of the hardware complexity and its time response is the greatest. A distributed arithmetic was developed for this reason by some authors. In the hardware realization the multiplier is substituted with a memory, adder and register. The partial sum of coefficients is written in the memory. The partial sum from memory with the previous result from the adder divided by two in the adder is calculated. The previous result from the adder is written in the register on b -iteration of the summed partial results is needed for the calculation of one entire product in the case of the distributed arithmetic. b is the number of bits in the input word. The complexity of the hardware realization of all FIR digital filters in the distributed arithmetic is determined with the word length in all substructures, with ripple in passband and stopband and with the width of transition band on the frequency response. With an increase in the word length, sharpness of the frequency response in transition band and reduction of ripple in passband and stopband the number of basic elements and the time response are increased. The capacity of the memory is determined with 2^N , N is the number of impulse response coefficients. In modern digital filter designs the sampling frequency is limited to 20 MHz and the number of impulse response coefficients to 200. With the new technology of digital circuits this limit will be increased.

Our paper deals with the possibility of reducing the memory capacity by using a combined realization form. The combined realization form contains a cascade-connected structure built with a parallel subsection. We present two FIR digital filters in the distributed arithmetic realization form. The first one is realized with digital elements such as logic gates, adders, inverters and registers, and the other one with digital elements and

read-write memory. Both forms are suitable for realization in custom-design integrated circuits or in PLD. Another advantage of our contribution is an optimal word length in all subsections with consideration of the roundoff noise and expected ripple in passband and stopband. As a result, an optimal lowpass FIR digital filter in the distributed arithmetic with 61 coefficients of the impulse response usefulness of the combined realization form is presented and analysed.

For the combined realization form of the FIR digital filter design impulse response coefficients are needed. These coefficients can be calculated with software such as MATLAB. The impulse response coefficients $h(k)$ are the coefficients of transfer function $H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)z^{-k}$ and N is the filter length. From the zeros of the transfer function of the FIR digital filter the zeros of the cascade structure are selected. This selection requires approximately an equal number of zeros in all cascaded structures, and a similar frequency response in all cascaded structures with the frequency response of the whole FIR digital filter. With this selection, the hardware complexity of the cascaded structure is almost the same and the magnitude of the output signal from all the cascaded structures is suitably high.

The output signal as a response to the input white noise signal is calculated with our program package for simulation of an FIR digital filter structure. Depending on quantization errors, an optimal word length in all sections is chosen. The simulated results and the theoretically calculated quantization errors with linear quantization error models are compared. A simplified method for determination of the optimal word length was searched for by using theoretically calculated quantization errors.

Key words: finite impulse response digital filters, distributed arithmetic, optimal substructure, quantization error analysis

1 Uvod

Nerekurzivna digitalna sita v porazdeljeni aritmetiki so zanimiva za obdelavo signalov pri visokih frekvencah, ker

so absolutno stabilna in ker so strukture v digitalnem situ preproste: seštevalnik, odštevalnik, pomnilnik, zaporedni registri in vzporedni registri [1, 21, 13].

Narejena bo primerjava simulacijskih rezultatov za nerekurzivna digitalna sita, izvedena v porazdeljeni aritmetiki v osnovni, vzporedni, kaskadni in kombinirani realizacijski obliki. Kot kriterij za iskanje optimalnih dolžin besed pri uporabi aritmetike s fiksno decimalno vejico bo izbrano podobno veliko razmerje $\frac{PBG}{sba}$ med povprečno velikostjo izhodnega signala v pasovno prepusnem frekvenčnem področju PBG proti maksimalni vrednosti signala v zapornem frekvenčnem področju sba , kot ga ima nekquantizirano digitalno sito.

2 Porazdeljena aritmetika v nerekurzivnem situ

Izhodna vrednost signala iz digitalnega sita je določena s konvolucijsko vsoto med nizom vhodnih vrednosti $\{x(k)\}$ in nizom koeficientov digitalnega sita $\{h(k)\}$:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) \cdot x(n-k). \quad (1)$$

Množenje se nadomesti s seštevanjem delnih vsot [1]. Pri zapisu podatkov s fiksno decimalno vejico zapišemo vhodne podatke v dvojiškem komplementu:

$$x(k) = -b_0(k) + \sum_{i=1}^{B_x-1} b_i(k) \cdot 2^{-i}, \quad (2)$$

$b_i(k)$ je binarna vrednost 0 ali 1, $b_0(k)$ pa pomeni predznak. Najmanj utežni bit v vhodni besedi je $b_{B_x-1}(k)$.

V izračunu trenutnega odziva digitalnega sita upoštevamo enačbo 2 in dobimo:

$$y(n) = -\sum_{k=0}^{N-1} h(k) \cdot b_0(n-k) + \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{i=1}^{B_x-1} h(k) \cdot b_i(n-k) \cdot 2^{-i} \right]. \quad (3)$$

Ob zamenjavi vrstnega reda seštevanja dobimo v enačbi 4 podobne delne vsote koeficientov $dv_i(n)$

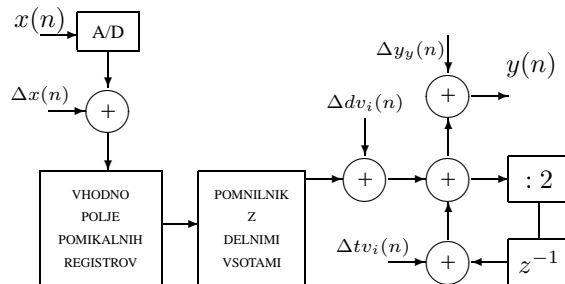
$$dv_i(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) \cdot b_i(n-k), \quad (4)$$

ki jih lahko v primeru konstantnih koeficientov impulznega odziva vnaprej izračunamo in vpišemo v pomnilnik. Zmogljivost pomnilnika znaša $2 \cdot 2^N$ besed oziroma 2^N besed pri negiranju delne vsote $dv_0(n)$ pred seštevanjem [2]. Druge postopke za zmanjšanje delnih vsot najdemo v [3, 20]. Tako je trenutni odziv nerekurzivnega digitalnega sita podan z delnimi vsotami:

$$y(n) = -dv_0(n) + dv_1(n) \cdot 2^{-1} + \dots + dv_{B_x-1}(n) \cdot 2^{-(B_x-1)}. \quad (5)$$

3 Analiza kvantizacijskih pogreškov za nerekurzivno digitalno sito v porazdeljeni aritmetiki

Pri realizaciji digitalnega sita v aparaturni izvedbi smo omejeni z dolžinami besed registrov, pomnilnikov in aritmetične enote. Pri kvantizaciji uporabimo preprostejše rezanje ostanka ali zaokroževanje [11, 12, 18, 5, 9, 22].



Slika 1. Struktura nerekurzivnega digitalnega sita s porazdeljeno aritmetiko z dodanimi izvori pogreškov
Figure 1. The FIR digital filter structure in distributed arithmetic with sources of quantization errors

Na sliki 1 so prikazani izvori pogreškov za nerekurzivno digitalno sito v porazdeljeni aritmetiki. Z $\Delta x(n)$, $\Delta dv_i(n)$, $\Delta tv_i(n)$ in $\Delta y_y(n)$ smo označili pogrešek vhodne besede, delnih vsot, trenutne vsote in izhodne besede.

Pri kvantiziranju zaokrožimo vrednosti vhodnega signala $x(n)$ na $\tilde{x}(n)$ in absolutni pogrešek $\Delta x(n)$ je:

$$\Delta x(n) = x(n) - \tilde{x}(n). \quad (6)$$

Ker uporabimo zaokroževanje, so vrednosti $\Delta x(n)$ enakomerno porazdeljene na intervalu $(-\frac{Q_x}{2}, +\frac{Q_x}{2})$. Pri predpostavki, da so posamezni pogreški nekorelirani med seboj in z vhodnim signalom, jih obravnavamo kot beli šum [14, 16, 2] s srednjo vrednostjo $m_x=0$ in z disperzijo $\sigma_x^2 = \frac{Q_x^2}{12}$. S Q_x je označena stopnja kvantizacije, ki jo izračunamo iz dolžine vhodne besede $Q_x = \frac{1}{2^{B_x-1}}$. Zaradi kvantizacije vhodnega signala dobimo v izhodnem signalu $y_x(n)$ trenutni pogrešek, podan s konvolucijsko vsoto koeficientov impulznega odziva sita $\{h(k)\}$ in trenutnega $\Delta x(n)$ in $(N-1)$ predhodnih kvantizacijskih pogreškov $\Delta x(n-1), \dots, \Delta x(n-(N-1))$:

$$\Delta y_x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) \cdot \Delta x(n-k). \quad (7)$$

Z upoštevanjem lastnosti vhodnih pogreškov je srednja vrednost izhodnega pogreška [6] enaka nič in disperzija:

$$\sigma_x^2 = \frac{Q_x^2}{12} \sum_{i=0}^{N-1} h(i)^2. \quad (8)$$

Z uporabo Parsevalovega teorema je disperzija dana z:

$$\sigma_x^2 = \frac{Q_x^2}{12} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega \right) = P_{\Delta y_x}. \quad (9)$$

Ne glede na izbran način normiranja koeficientov impulznega odziva digitalnega sita ($\sum_{i=0}^{N-1} |h(n)| = 1$ ali $(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega) \leq 1$) dobimo disperzijo kvantizacijskega šuma $\sigma_x^2 \leq \frac{Q_x^2}{12}$ [6]. S tem je moč kvantizacijskega šuma na izhodu pri zaokroževanju vrednosti vhodnega signala $P_{\Delta y_x}$ dana z disperzijo izhodnega pogreška σ_x^2 :

$$P_{\Delta y_x} = \sigma_x^2 = \frac{Q_x^2}{12}. \quad (10)$$

Zaokroževanje delnih vsot $\Delta dv_i(n)$ se izvede pred vpisom v pomnilnik. Z dolžino besede v pomnilniku B_v je določen korak kvantizacije $Q_v = \frac{1}{2^{B_v-1}}$. Za novo izhodno vrednost $y(n)$ se najprej k začetni vrednosti nič prišteje delna vsota, ki jo naslovijo najmanj utežni biti b_{B_x-1} vhodnih besed $x(n), x(n-1), \dots, x(n-(N-1))$. Nato se vrednost deli z dve in prišteje k novi delni vsoti naslovljeni z biti b_{B_x-2} . Postopek se ponavlja do nastopa zadnje delne vsote naslovljene z biti b_{B_x-0} , ki se od trenutne vrednosti odšteje. Podobno je izhodni kvantizacijski pogrešek $\Delta y_v(n)$ podan z zaokroževalnim pogreškom uteženih delnih vsot:

$$\Delta y_v(n) = -\Delta dv_0(n) + \Delta dv_1(n) \cdot 2^{-1} + \dots + \Delta dv_{B_x-1}(n) \cdot 2^{-(B_x-1)}. \quad (11)$$

Naj bodo posamezni kvantizacijski pogreški $\Delta dv_i(n), i = 0, 1, \dots, B_x-1$ enako verjetni na intervalu $(-\frac{Q_v}{2}, \frac{Q_v}{2})$ in nekorelirani med seboj. Potem je srednja vrednost pogreška enaka nič in disperzija $\sigma_v^2 = \frac{Q_v^2}{12}$. Kvadratno vrednost posameznega pogreška izhodne vrednosti $(\Delta y_v(n))^2$ podamo z utežno vsoto delnih vsot:

$$\begin{aligned} (\Delta y_v(n))^2 &= (\Delta dv_0(n))^2 + (\Delta dv_1(n))^2 \cdot 2^{-2} + \dots \\ &+ (\Delta dv_{B_x-1}(n))^2 \cdot 2^{-2(B_x-1)}, \end{aligned} \quad (12)$$

pri tem smo upoštevali, da so zaradi nekoreliranih pogreškov pri kvadriranju od nič različni samo kvadrati pogreškov [2, 17]. Izhodna šumna moč $P_{\Delta y_v}$:

$$\begin{aligned} P_{\Delta y_v} &= \sigma_{dv}^2 = \overline{(\Delta y_v^2)} = \frac{1}{K} \sum_{n=1}^K (\Delta y_v(n))^2 \\ &= \frac{Q_v^2}{12} \sum_{j=0}^{B_x-1} 2^{-2j} = \frac{Q_v^2}{12} \cdot \frac{4}{3} = \frac{Q_v^2}{9}. \end{aligned} \quad (13)$$

V aritmetični enoti se trenutna izračunana vrednost kvantizira samo tedaj, ko ima seštevalnik manjše število bitov B_a od vsote dolžin vhodne besede B_x in delne vsote B_v

zmanjšane za ena $B_a < B_x + B_v - 1 = B_{amax}$. Najkrajša dolžina besede v aritmetični enoti B_{amin} je enaka dolžini besede delnih vsot v pomnilniku: $B_{amin} = B_v$. Pogreški nastanejo v aritmetični enoti pri deljenju trenutnih vsot v izračunu trenutne izhodne vrednosti $y_a(n)$. Tako dobimo za trenutne vrednosti:

$$\begin{aligned} tv_{B_x-1}(n) &= 0 + dv_{B_x-1}(n), \\ tv_{B_x-2}(n) &= \frac{tv_{B_x-1}(n)}{2} + dv_{B_x-2}(n), \dots, \\ tv_0(n) &= \frac{tv_1(n)}{2} - dv_0(n) \text{ in} \\ y_a(n) &= tv_0(n). \end{aligned} \quad (14)$$

Prva in zadnja trenutna vrednost sta točni $\Delta tv_{B_x-1}(n) = 0$ in $\Delta tv_0(n) = 0$, drugi pogreški trenutnih vrednosti $\Delta tv_j(n) = tv_j(n) - \tilde{tv}_j(n), j = 1, \dots, (B_x-2)$ pa so pri rezanju ostanka enaki vrednosti $0 < \Delta tv_j(n) < \frac{Q_a}{2}$. Trenutni pogrešek izhodne vrednosti $\Delta y_a(n)$ ima vrednost z območja $0 < \Delta y_a(n) < Q_a$. V primeru nekoreliranih pogreškov je srednja vrednost izhodnega pogreška enaka $m_{\Delta y_a} = \frac{Q_a}{2}$ in disperzija $\sigma_a^2 = \frac{Q_a^2}{12}$. Pri izračunu disperzije izhodnih pogreškov upoštevamo deljenje trenutnih vrednosti in dobimo:

$$\Delta y_a^2 = \frac{Q_a^2}{12} \sum_{j=1}^{B_x-1} 2^{-2j} = \frac{Q_a^2}{12} \cdot \frac{1}{3} (1 - 2^{-2(B_x-2)}). \quad (15)$$

Limita vsote v enačbi 15 je $\frac{1}{3}$ že pri $B_x > 8$, zato dobimo za disperzijo izhodnega pogreška vrednost:

$$\Delta y_a^2 = \frac{Q_a^2}{36}. \quad (16)$$

Moč izhodnega kvantizacijskega šuma pri rezanju ostanka v aritmetični enoti je:

$$P_{\Delta y_a} = m_{\Delta y_a}^2 + \Delta y_a^2 = \frac{Q_a^2}{3}. \quad (17)$$

Pri kvantizaciji izhodne besede je izhodna šumna moč pri zaokroževanju ostanka podana z disperzijo:

$$P_{\Delta y_y} = \sigma_i^2(n) = \frac{Q_y^2}{12}, \quad (18)$$

in pri rezanju ostanka z vsoto disperzije in kvadrata srednje vrednosti pogreška:

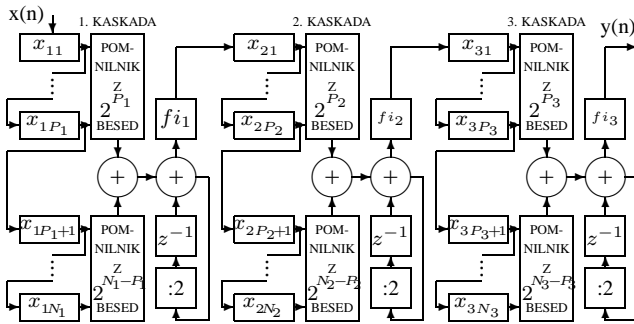
$$P_{\Delta y_y} = m_{\Delta y_y}^2 + \sigma_i^2(n) = \frac{Q_y^2}{4} + \frac{Q_y^2}{12} = \frac{Q_y^2}{3}. \quad (19)$$

Skupna izhodna šumna moč v strukturi porazdeljene aritmetike je pri predpostavki, da so posamezni izvori šuma med seboj nekorelirani in da so nekorelirani z vhodnim signalom in jih modeliramo z belošumnim procesom, enaka vsoti posameznih prispevkov moči:

$$\begin{aligned} P_{\Delta y} &= P_{\Delta y_x} + P_{\Delta y_v} + P_{\Delta y_a} + P_{\Delta y_y} \\ &= \frac{Q_x^2}{12} \sum_{k=0}^{N-1} |h(k)|^2 + \frac{Q_v^2}{9} + \frac{Q_a^2}{3} + \frac{Q_y^2}{3}. \end{aligned} \quad (20)$$

V enačbi 20 ima največji vpliv na izhodni kvantizacijski šum kvantizacija izhodnih vrednosti, aritmetike in delnih vsot, manj pa kvantizacija vhodne besede, ker je $\sum_{k=1}^{n-1} |h(k)|^2 < 1$. Koeficienti $h(k)$ so pri uporabi aritmetike s stalno decimalno vejico po normiranju manjši od ena s tem pa so $|h(k)|^2 \ll 1$. Z modelom za določitev šumne moči izbiramo optimalne dolžine besed za zapis delnih vsot, seštevalnika in izhodne vrednosti, če poznamo vhodno dolžino besede B_x .

4 Kombinirana realizacijska oblika

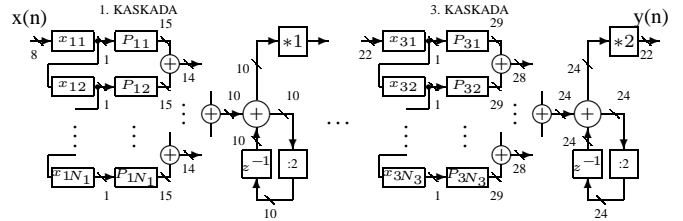


Slika 2. Prva kombinirana struktura digitalnega sita v porazdeljeni aritmetiki
Figure 2. The first combined realization form of the FIR digital filter in distributed arithmetic

Kombinirano realizacijsko obliko [17] dobimo z razdelitvijo posamezne kaskade na vzporedne podstrukture. Oglejmo si dva značilna primera zgradbe digitalnega sita s tremi kaskadami. V prvem primeru izbiramo med vzporednimi podstrukturami višjih stopenj, kot prikazuje slika 2. Z $x_{1j}, j = 1, \dots, P_1, \dots, N_1$ so označeni pomikalni registri vhodnega polja prve kaskade, z $x_{2k}, k = 1, \dots, P_2, \dots, N_2$ druge in z $x_{3l}, l = 1, \dots, P_3, \dots, N_3$ tretje kaskade ter z f_{i1}, f_{i2}, f_{i3} množilniki s konstanto, ki so izvedeni kar s premikom vsebine izhodne besede (množenje z $2^k, k = 0, 1 \text{ ali } 2$). Skupno število pomikalnih registrov v kaskadni izvedbi je $N_1 + N_2 + N_3$ in je za število kaskad zmanjšano za ena večje od števila registrov v osnovni izvedbi: $N = N_1 + N_2 + N_3 - 2$. Zmogljivost pomnilnikov v kombinirani izvedbi z dvema vzporedno vezanima podstrukturama v vsaki kaskadi je $2^{P_1} + 2^{N_1-P_1} + 2^{P_2} + 2^{N_2-P_2} + 2^{P_3} + 2^{N_3-P_3}$.

V drugem primeru imamo zgradbo sita s tremi kaskadami in z osnovnimi vzporednimi podstrukturami, kot prikazuje slika 3. V tej realizacijski obliki pomnilnik nadomestimo z $N = N_1 + N_2 + N_3$ registri z vpisanimi koeficienti sita, v vsaki kaskadi pa potrebujemo dodatne seštevalnike za izračun delne vsote. Pri N_i registrih imamo $N_i - 1$ dodatnih seštevalnikov.

Na sliki 3 so označeni z x_{11}, \dots, x_{1N_1} in x_{31}, \dots, x_{3N_3} vhodni pomikalni registri prve in tretje kaskade ter z P_{11}, \dots, P_{1N_1} in P_{31}, \dots, P_{3N_3} vzporedni registri s koeficienti sita prve in tretje kaskade. Posebej je označeno še optimalno število linij med vhom, registri, seštevalniki



Slika 3. Druga kombinirana struktura sita stopnje 60 s vzporednimi podstrukturami z minimalnim pomnilnikom
Figure 3. The second combined realization form of the FIR digital filter with minimal memory

in izhodom. Oblika je zanimiva za sita s sprotnim spreminjanjem koeficientov, kot na primer v adaptivnih sitih.

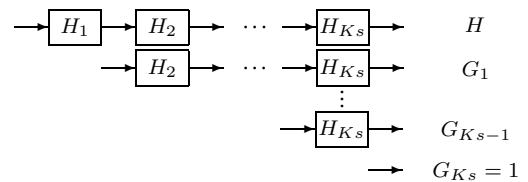
Pri obravnavi kvantizacijskega šuma v kaskadni in kombinirani realizacijski obliki sita uporabimo model, ki ga je predstavil Jackson [9, 10]. Prenosne funkcije posameznih kaskad so H_1, H_2, \dots, H_{K_s} . Z njimi lahko določimo prenosne funkcije od izhoda posamezne kaskade proti izhodu celotnega sita: - od prve kaskade do izhoda $G_1 = H_2 \cdot H_3$ in - od druge kaskade do izhoda $G_2 = H_3$. Izhodno šumno moč ocenimo s povprečnimi vrednostmi posameznih izhodnih pogreškov:

$$P_{\Delta y} = P_{\Delta y_x} + P_{\Delta y_{G_1}} + P_{\Delta y_{G_2}} + \dots + P_{\Delta y_{G_{K_s}}}$$

$$= \frac{Q_x^2}{12} \sum_{k=0}^{N-1} h(k)^2 + \left(\frac{Q_{v_1}^2}{9} + \frac{Q_{a_1}^2}{3} + \frac{Q_{y_1}^2}{12} \right) \sum_{k=0}^{N_1-1} g_1(k)^2$$

$$+ \left(\frac{Q_{v_2}^2}{9} + \frac{Q_{a_2}^2}{3} + \frac{Q_{y_2}^2}{12} \right) \sum_{k=0}^{N_2-1} g_2(k)^2 + \dots +$$

$$\left(\frac{Q_{v_{K_s}}^2}{9} + \frac{Q_{a_{K_s}}^2}{3} + \frac{Q_{y_{K_s}}^2}{12} \right) \sum_{k=0}^{N_{K_s}-1} g_{K_s}(k)^2. \quad (21)$$



Slika 4. Prenosne funkcije G_i od vhoda in od izhodov posameznih kaskad do izhoda FIR digitalnega sita
Figure 4. The G_i transfer functions from input and from particular cascade outputs to output of the FIR digital filter

Z $g_1(k)$ smo označili koeficiente sita od prve kaskade do izhoda, z $g_2(k)$ od druge kaskade do izhoda sita in z $g_{K_s}(k)$ koeficiente zadnje kaskade, kot prikazuje slika 4. Največji vpliv na izhodni kvantizacijski šum ima zadnja kaskada, zato bodo v njej dolžine besed največje. Velikost izhodne šumne moči je zelo odvisna od števila kaskad in njihove razporeditve [15, 4]. Tako je razmerje med minimalno in maksimalno vrednostjo variance za nerekurzivno digitalno sito stopnje 12 podano z $1,1Q^2 : 192,9Q^2$. Pri kaskadah višjih stopenj je to razmerje

med minimalno in maksimalno vrednostjo izhodne šumne moči pri različnem vrstnem redu kaskad mnogo manjša, ker so frekvenčni odzivi kaskad višjih stopenj podobni frekvenčnemu odzivu celotnega digitalnega sita.

Pri vzporedni realizacijski obliki nerekurzivnega digitalnega sita se kvantizacijski pogreški večajo linearno s številom dodatnih seštevanj N_p :

$$P_{\Delta y} = \frac{Q_x^2}{12} \sum_{k=0}^{N-1} |h(k)|^2 + N_p \cdot \frac{Q_v^2}{9} + \frac{Q_a^2}{3} + \frac{Q_y^2}{12}. \quad (22)$$

V kombinirani strukturi je skupna kvantizacijska izhodna šumna moč dana z izrazom:

$$\begin{aligned} P_{\Delta y} &= P_{\Delta y_x} + P_{\Delta y_{G_1}} + P_{\Delta y_{G_2}} + \dots + P_{\Delta y_{G_{K_s}}} \\ &= \frac{Q_x^2}{12} \sum_{k=0}^{N-1} h(k)^2 + \left(N_{p1} \frac{Q_{vp1}^2}{9} + \frac{Q_{a1}^2}{3} + \frac{Q_{y1}^2}{12} \right) \sum_{k=0}^{N_1-1} g_1(k)^2 \\ &+ \left(N_{p2} \frac{Q_{vp2}^2}{9} + \frac{Q_{a2}^2}{3} + \frac{Q_{y2}^2}{12} \right) \sum_{k=0}^{N_2-1} g_2(k)^2 + \dots \\ &+ \left(N_{pK_s} \frac{Q_{vpK_s}^2}{9} + \frac{Q_{aK_s}^2}{3} + \frac{Q_{yK_s}^2}{12} \right) \sum_{k=0}^{N_{K_s}-1} g_{K_s}(k)^2, \quad (23) \end{aligned}$$

kjer so $N_{p1}, N_{p2}, \dots, N_{pK_s}$ števila vzporednih podstruktur v posameznih kaskadah.

V primeru dveh podstruktur izberemo dolžino besede za zapis delne vsote za bit večjo, kot jo ima kaskada v osnovni strukturi. S tem smo dosegli šumno moč $2 \cdot \frac{Q_{vp}^2}{9}$. Ker je $Q_{vp} = \frac{Q_v}{2}$, se je šumna moč zaradi kvantizacije delnih vsot v vzporednih podstrukturah zmanjšala za dvakrat.

5 Rezultati

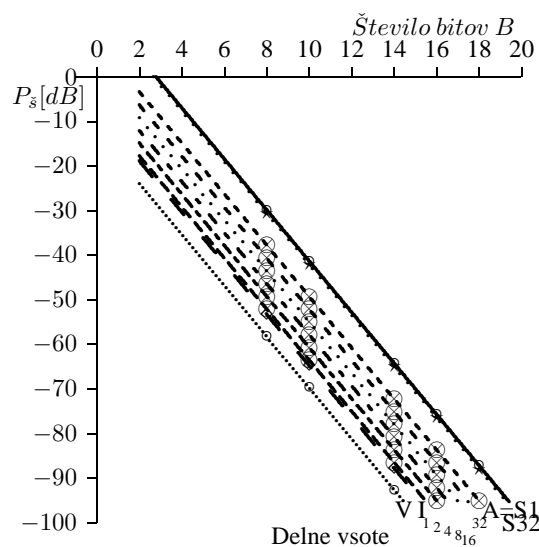
Na primeru nizkoprepustno nerekurzivnega digitalnega sita z $N = 61$ koeficienti sita smo v prvem delu rezultatov izračunali šumne moči s teoretičnima modeloma, podanima v enačbah 22 in 23 in v drugem delu še z računalniško simulacijo primerjali kvantizacijske pogreške in frekvenčne parametre digitalnih sit v osnovni, kaskadni in obeh kombiniranih realizacijskih oblikah.

Normirani koeficienti optimalnega nizkoprepustnega digitalnega sita z $N = 61$ s prepustno mejno frekvenco $F_p=0, 2 \frac{f_v}{f_v}$ in z zaporno mejno frekvenco $F_z=0, 3 \frac{f_v}{f_v}$ [19] so podani v tabeli 1. Za določitev koeficientov kombinirane realizacijske oblike smo najprej izračunali ničle polinoma osnovne prenosne funkcije, jih razdelili v želeno število kaskad in določili polinome posameznih kaskad ter jih razdelili na posamezne vzporedne podstrukture.

Pri osnovni (S_1) in 2, 4, 8, 16 in 32 (S_{32}) vzporednih strukturah so šumne moči iz modela v enačbi 22 predstavljene na sliki 5. Vidimo, da je skupna šumna moč najbolj odvisna od kvantizacij v aritmetični enoti, s številom vzporednih struktur pa raste tudi šum zaradi kvantizacij delnih vsot. Pri izbiranju dolžin besede poiščemo tiste, ki prispevajo podobno vrednost šuma na izhodu.

KOEFIICIENTI DIGITALNEGA SITA		
h(1)=h(61)=-7,287414E-08	h(2)=h(60)=+5,521158E-05	h(3)=h(59)=+2,606399E-07
h(4)=h(58)=-1,914193E-04	h(5)=h(57)=-6,370964E-07	h(6)=h(56)=+4,998029E-04
h(7)=h(55)=+1,306554E-06	h(8)=h(54)=-1,100417E-03	h(9)=h(53)=-2,368284E-06
h(10)=h(52)=+2,162206E-03	h(11)=h(51)=+3,922890E-06	h(12)=h(50)=-3,908995E-03
h(13)=h(49)=-6,016591E-06	h(14)=h(48)=+6,629582E-03	h(15)=h(47)=+8,648671E-06
h(16)=h(46)=-1,069784E-02	h(17)=h(45)=-1,177190E-05	h(18)=h(44)=+1,661982E-02
h(19)=h(43)=+1,524624E-05	h(20)=h(42)=-2,514851E-02	h(21)=h(41)=-1,885747E-05
h(22)=h(40)=+3,575638E-02	h(23)=h(39)=+2,236696E-05	h(24)=h(38)=-5,656147E-02
h(25)=h(37)=-2,547569E-05	h(26)=h(36)=+8,897182E-02	h(27)=h(35)=+2,791587E-05
h(28)=h(34)=-1,601389E-01	h(29)=h(33)=-2,948341E-05	h(30)=h(32)=+4,991331E-01
h(31)=+7,878128E-01		

Tabela 1. 61 koeficientov impulznega odziva optimalnega nerekurzivnega digitalnega sita v osnovni izvedbi
Table 1. The optimal FIR digital filter in basic structure with 61 coefficients of impulse response

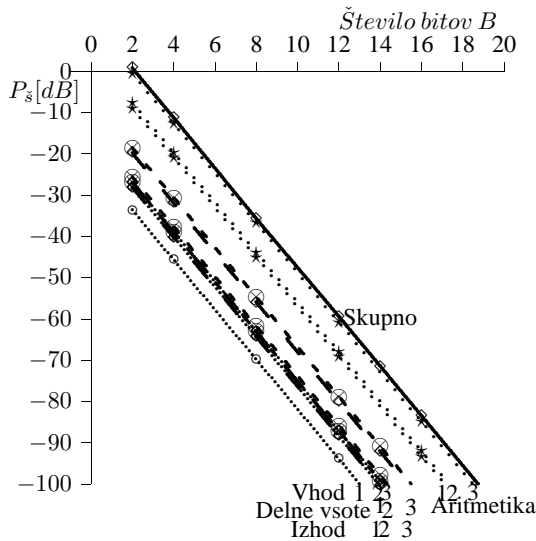


Slika 5. Izhodni kvantizacijski šum pri kvantizaciji vhodne besede V (o), aritmetike A (*), delnih vsot (x) in izhodne besede I (o) v osnovni strukturi S_1 , 2, 4, 8, 16 in 32 S_{32} vzporedno vezanih strukturah
Figure 5. The output noise power concerning on quantization an input world length V (o), world length in an arithmetic unit A (*), world length the partial sums (x) and output world length I (o) on the basic structure S_1 and parallel structure in 2, 4, 8, 16 and 32 substructure S_{32}

Za tri zaporedno vezane strukture (kaskadna struktura) so kvantizacijske šumne moči podane na sliki 6. Vidimo, da je posebej pomembna kvantizacija v zadnji kaskadi, ponovno pa je največji vpliv kvantizacij v aritmetični enoti. Iz obeh diagramov vidimo, da bo tudi za kombinirane strukture najpomembnejša kvantizacija v zadnji kaskadi z največjim vplivom kvantizacij v aritmetiki.

V drugem delu rezultatov predstavljamo odziv digitalnega sita na testne vzorce iz generatorja belega šuma s srednjo vrednostjo, enako $m = 1,7 \cdot 10^{-13}$, in standardnim odklonom σ pa 0,33. Območje amplitud iz generatorja belega šuma je od -1 do $+1$. Velikosti amplitud v amplitudnem spektru so 5,22 v celotnem frekvenčnem področju na intervalu $0 < \frac{f}{f_v} < 0,5$.

Časovni odzivi digitalnih sit so izračunani s krožno



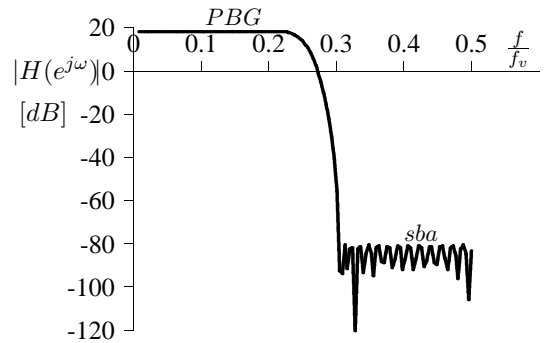
Slika 6. Izhodna šumna moč pri kvantiziranju vhodne besede (○), aritmetike (*), delnih vsot (⊗) in izhodne besede (◇) v zaporedno vezanih strukturah 1., 2. in 3. kaskade
 Figure 6. The output noise power concerning on quantization an input world length (○), world length in the arithmetic units (*), world length the partial sums (⊗) and output world length I (◇) of the three cascade structure

konvolucijo med vhodnim signalom in koeficienti sita, frekvenčni odzivi sita pa z diskretno Fourierjevo transformacijo časovnih odzivov. Kvantizacijske pogreške smo iskali kot razliko odzivov referenčnega digitalnega sita z 32-bitnimi dolžinami besed v vseh enotah sita in kvantiziranimi siti. Najprej smo opazovali posamične vplive kvantizacij in pri tem izbirali med 10-, 12-, 16-, 20- in 24-bitnimi besedami. Nato smo več vplivov kvantizacij združili. Iz nabora vseh simulacij smo izbrali po en primer, ki pomeni za podani primer sita optimalno izbiro dolžin besed.

Pri modeliranju digitalnega sita smo uporabili krožno konvolucijo. Programski modul za digitalno sito v PA je narejen tako, da ga je mogoče uporabljati več iteracij zaporedno, pri tem pa se delne vsote spremenijo za vsak modul. Tako smo isti modul uporabili za osnovno realizacijsko obliko in prav tako za posamezno kaskado v kaskadni in kombinirani realizacijski obliki. Izhodne časovne vrednosti so predstavljale vhodne vrednosti za naslednjo kaskado.

Na sliki 7 je prikazan amplitudno-frekvenčna karakteristika digitalnega sita z uporabljenimi koeficienti. Vidimo, da je amplituda v prepustnem področju frekvenc $0 < \frac{f}{f_v} < 0,2$ enaka $PBG=17,9 \text{ dB}$, v zapornem področju frekvenc $0,3 < \frac{f}{f_v} < 0,5$ pa je $sba=-80,5 \text{ dB}$. Dušenje nekvantiziranega sita je $A=98,4 \text{ dB}$.

V tabeli 2 so podane aparaturne kompleksnosti posameznih struktur v situ. Sito v osnovni izvedbi vsebuje v vhodnem polju pomikalnih registrov $61 \times 10 = 610$ bistabilnih elementov, pomnilnik velikosti



Slika 7. Frekvenčni odziv optimalnega FIR digitalnega sita z 61 koeficienti
 Figure 7. Frequency response of optimal FIR digital filter with 61 coefficients

Izvedba	Vhodno polje registrov	Pomnilnik	Arit. enota	Dodatni seštev.
Osnovna	61	2^{61}	1	
Tri kaskadna	21	2^{21}	1	
	21	2^{21}	1	
1. kombinirana	11 + 10	$2^{11}, 2^{10}$	1	1
	11 + 10	$2^{11}, 2^{10}$	1	1
	11 + 10	$2^{11}, 2^{10}$	1	1
2. kombinirana	21	21×1	1	21
	21	21×1	1	21
	21	21×1	1	21

Tabela 2. Aparaturna kompleksnost FIR digitalnega sita z 61 koeficienti v osnovni, trikaskadni in dveh kombiniranih realizacijskih oblikah

Table 2. The hardware complexity of FIR digital filter with 61 coefficients in the basic and three cascade in two different combined realization form

$2^{61} = 2,3 \cdot 10^{18}$ 24-bitnih besed, aritmetično enoto s 24 dvovhodnimi ekskluzivnimi-ali vrati, 24-bitnim seštevalnikom in 24-bitnim vzporedno-vzporednim registrom. V trikaskadni izvedbi ima sito $21 \cdot (8+8+14)=630$ bistabilnih elementov v vhodnem polju pomikalnih registrov, pomnilnike z 2^{21} 10-bitnimi besedami, 2^{21} 16-bitnimi besedami in 2^{21} 24-bitnimi besedami ter tri aritmetične enote z 8-, 14- in 24-bitno dolžino besed. V 1. kombinirani strukturi zmanjšamo pomnilnike, pri tem pa dodamo v vsaki kaskadi dodatni seštevalnik. V 2. kombinirani strukturi nadomestimo pomnilnik z delnimi vsotami z registri, ki imajo vpisane koeficiente sita. Za izračun delne vsote ima sito 21 dodatnih seštevalnikov v vsaki kaskadi.

Na podlagi dušenja sita trikaskadne strukture in teoretično izračunanih šumnih moči izbiramo ustrezne dolžine besed tudi za obe kombinirani strukturi. V tabeli 3 so za izbrano kombinacijo dolžin besed v posamezni enoti digitalnega sita podani parametri frekvenčnega odziva, kvantizacijske šumne moči in razmerje $\frac{P_s}{P_s}$.

Izvedba	KVANTIZACIJA	A	pbg	pbr	sba	P_s	$\frac{P_s}{P_s}$
	vh dv ar iz	[dB]	[dB]	[dB]	[dB]	$\times 10^{-5}$	$\times 10^3$
Osnovna	8 24 24 22	98,1	11,9	-14,3	-86,2	0,4	7,9
	10 24 24 22	98,4	11,9	-15,4	-86,4	0,25	120
Tri-kaskadna	8 10 10 8	98,0	15,4	-6,5	-82,5	1,9	3,7
	8 16 16 14 14 24 24 22						
1.komb.	8 11 10 8	96,0	15,4	-8,9	-80,6	4,5	0,92
	8 17 16 14 14 25 24 22						
2.komb.	vh ko dv ar iz	95,3	15,4	-4,8	-79,9	2,3	1,8
	8 8 10 10 8 8 14 16 16 16 16 19 24 24 22						

Tabela 3. Lastnosti digitalnih sit v osnovni, trikaskadni in kombinirani realizacijski obliki stopnje 60 v PA pri izbranih optimalnih dolžinah besed

Table 3. Characteristic of FIR digital filter on basic, three cascades and two different combined realization form with optimal world length in all sections

6 Sklepi

Obravnavali smo nerekurzivna digitalna sita, ki so izvedena v porazdeljeni aritmetiki in so primerna za obdelavo podatkov v realnem času. Pokazali smo, kako izbiramo optimalne dolžine besed, ki zagotovijo želeno dušenje sita, in pri tem zmanjšamo aparaturno kompleksnost sita. Primerjali smo parametre frekvenčnih odzivov, kvantizacijske šumne moči in razmerje signal-šum $\frac{P_s}{P_s}$ za nizkoprepustno optimalno digitalno sito stopnje 60. Na podlagi teh primerjav smo pokazali, da je treba pri načrtovanju nerekurzivnega digitalnega sita nameniti posebno pozornost optimalni izbiri dolžin besed v posameznih enotah sita, saj nam le takšna izbira zagotovi manjšo aparaturno kompleksnost, včasih pa tudi praktično izvedljivost sita.

7 Literatura

- [1] A. Peled, B. Liu. A new approach to the realization of nonrecursive digital filters. *IEEE Trans. Audio and Electroacoustic*, Vol. AU-21, (6), Dec 1973.
- [2] R. Babič. *Posebnosti porazdeljene aritmetike pri izvedbi nerekurzivnih digitalnih sit*. PhD thesis, Univerza v Mariboru, TF Maribor, 1991.
- [3] M. Bütner and H. W. Schüßler. On structures for the implementation of the distributed arithmetic. *NTZ*, 29, Jun 1976.
- [4] D. S. K. Chan and L.R. Rabiner. An algorithm for minimizing roundoff noise in cascade realizations of finite impulse response digital filters. *Bell Sys. Tech. J.*, 52, (3):347–385, Mar 1973.
- [5] D. S. K. Chan and L. R. Rabiner. Analysis of quantization errors in the direct form for finite impulse response digital filters. *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, A U - 21, (4):354–366, Aug 1973.
- [6] D. S. K. Chan and L. R. Rabiner. Theory of roundoff noise in cascade realizations of finite impulse response digital filters. *Bell Sys. Tech. J.*, 52, (3):329–345, Mar 1973.
- [7] C.-F. Chen. Implementing fir filters with distributed arithmetic. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-33, (4):1318–1321, Oct. 1985.

- [8] G. Wade, P. Van-Eetvelt and H. Darwen. Synthesis of efficient low-order fir filters from primitive sections. *IEEE Proceedings*, 137(5):367–372, Oct. 1990.
- [9] L. B. Jackson. On the interaction of roundoff noise and dynamic range in digital filters. *Bell Syst. Tech. J.*, (49):159–184, Feb 1970.
- [10] L. B. Jackson. *Digital Filters and Signal Processing*. Kluwer Academic Publishers Netherlands, 1989.
- [11] K. D. Kammeyer. Quantization error analysis of the distributed arithmetic. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. CAS-24, (12), Dec 1977.
- [12] K. D. Kammeyer. Quantization error analysis of nonrecursive filters in distributed arithmetic. *AEU, Band 32*, 1978.
- [13] L. Mintzer. Fir filters with field-programmable gate arrays. *Journal of VLSI Signal Processing*, (6):119–127, 1993.
- [14] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer. *Digital Signal Processing*. Prentice - Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [15] W. Schüßler. On structures for nonrecursive digital filters. *AEU*, pages 255–258, 1972.
- [16] M. Solar. Digitalna sita v kaskadni obliki višjih stopenj. *Master's thesis*, Univerza v Mariboru, TF Maribor, 1991.
- [17] M. Solar. *Izbira optimalnih podstruktur digitalnega sita s porazdeljeno aritmetiko*. PhD thesis, Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, Maribor, 1995.
- [18] F. J. Taylor. An analysis of the distributed arithmetic digital filter. *IEEE Trans. on A.S.S.P.*, Vol. ASSP-35, (5):1165–1170, Oct 1986.
- [19] F. J. Taylor and T. Stouraitis. *Digital Filter Design Software for IBM PC*. Marcel Dekker Inc., New York, 1987.
- [20] W. Steenaert, D. Dubois and O. Monkewich. Stored product digital filtering, structures, potential and applications. *Proc. European Conf. Circuit Theory and Design*, pages 118–126, 1981.
- [21] S. A. White. Applications of distributed arithmetic to digital signal processing : A tutorial review. *IEEE ASSP Magazine*, pages 4–19, Jul 1989.
- [22] S. K. Mitra. *Digital Signal Processing: A Computer-Based Approach*. McGraw-Hill, Singapore, 1998.
- [23] C. Yeunung. *Designing of FIR Digital Filters with Finite Coefficient Word Lengths*. PhD thesis, Rutgers University the State U. of New Jersey, (New Brunswick), 1979.

Mitja Solar je diplomiral leta 1983, leta 1991 magistriral in leta 1995 doktoriral na Fakulteti za elektrotehniko, računalništvo in informatiko v Mariboru. Sedaj je zaposlen na Fakulteti za elektrotehniko, računalništvo in informatiko v Mariboru kot docent. Raziskovalno delo je vezano na digitalno procesiranje signalov, s poudarkom na realizacijskih oblikah digitalnih filtrov.

Rudolf Babič je diplomiral leta 1970 na Fakulteti za elektrotehniko v Ljubljani. Magistrski študij je končal na Visoki tehniški šoli v Mariboru, doktoriral pa je na Tehniški fakulteti v Mariboru leta 1991. Sedaj je izredni profesor na Fakulteti za elektrotehniko, računalništvo in informatiko Univerze v Mariboru. Raziskovalno delo je vezano na digitalno obdelavo signalov, posebej na uporabo porazdeljene aritmetike pri izvedbi digitalnih sit v programirljivih logičnih vezjih.

Bruno Stiglic je diplomiral leta 1957, magistriral leta 1974 in doktoriral leta 1975 na Fakulteti za elektrotehniko v Ljubljani. Je zaslužni profesor na Fakulteti za elektrotehniko, računalništvo in informatiko v Mariboru. Raziskovalno delo je vezano na področja informacijskih sistemov, podatkovnih baz in intelligentnih sistemov.